广义解析函数及其拓广

闻国椿 杨广武 黄 沙 等编著

河北教育出版社

责任编辑：刘贵廷
封面设计：冯喜臣

ISBN7-5434-0251-3
O·6 定价：4.35 元

广义解析函数及其拓广

闻国椿　杨广武　黄　沙　等编著

河 北 教 育 出 版 社

《广义解析函数及其拓广》内容提要

本书共分六章，前三章是一些积分及其性质，拟共形映射与广义解析函数，其中写入了有关拟共形映射与广义解析函数的一些新内容，如在第三章中较系统的介绍了广义解析函数的各种边值问题。本书的后三章主要讲述二阶椭圆型方程，多个未知函数的椭圆型方程组以及 Clifford 代数上的解析性，其中有不少内容是作者在近年来获得的新结果，如第五章讨论了多个未知函数的一阶、二阶线性与非线性椭圆型方程组一些边值问题的可解性，这些结果包括广义超解析函数的相应定理作为特别情形。

本书可作为高等学校数学系学生和研究生的教学材料，也可供大学数学教师与科学技术人员参阅。

广 义 解 析 函 数 及 其 拓 广

闻国椿　杨广武　黄　沙　等编著

河北教育出版社出版（石家庄市北马路45号）
河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

850×1168毫米 1/32　12.357印张　307,000字　1989年8月第1版
1989年8月第1次印刷　印数：1—2,350　定价：4.35元

ISBN 7-5434-0251-3/O·6

序 言

解析函数反映了力学、物理中一些特殊的实际现象，它的理论已比较系统、深入，而广义解析函数是解析函数的扩充，它反映着比解析函数更一般的力学、物理现象。大家知道：解析函数可看成是 Cauchy-Riemann 方程组：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

于平面区域内的解，而广义解析函数则是标准化的椭圆型方程组

(*)：$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=au+bv$，$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=cu+dv$

于平面区域内的解。

L. Bers 与 И. H. Bekya 对椭圆型方程组（*）进行了开创性的工作，得到了重要的研究成果，他们分别出版了专著，并把这种理论称为《准解析函数》与《广义解析函数》(以后我们统称为广义解析函数)。对于广义解析函数，也有相应于解析函数的积分理论和级数理论，还有其它不少类似于解析函数的性质。至于广义解析函数的几何理论，例如 Riemann 变换定理，对于方程组（*）一般是不成立的，但对于一致椭圆型方程组：$\frac{\partial v}{\partial y}$

$=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}$，$-\frac{\partial v}{\partial x}=d\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial y}$ 仍有相应的 Riemann 变换定理，这也称为拟共形映射的基本定理。

И.H.Bekya 的《广义解析函数》已在 1960 年翻译成中文，并由人民教育出版社出版，但时间已过去 20 多年了，这个方向

的理论有了很大的发展，需要进一步总结这方面的研究成果。在本书的前三章，补充了一些有关广义解析函数的新内容，例如在第二章中写入了线性情形下拟共形映射的基本定理及其证明，第三章则较系统地介绍了广义解析函数的各种边值问题。本书的后三章是 И.Н.Bekya 的《广义解析函数》一书中所没有的，例如第六章介绍了 Clifford 代数上的解析性，第五章则讨论了多个未知函数的一阶、二阶线性与非线性椭圆型方程组一些边值问题的可解性，其中有不少内容是作者在近年来获得的新结果，这些结果包括广义超解析函数的相应定理作为特殊情形。

两、三年前，在我国出版了《共形映射与边值问题》及《线性与非线性椭圆型复方程》，前者是一本基础专门的书，后者是一本专门著作，在这两者间需要有一座桥梁，而本书就起着桥梁的作用，它既是《共形映射与边值问题》理论的进一步提高，又是《线性与非线性椭圆型复方程》的理论基础，这也是我们编写本书的一个目的。

近十年来，我国在“奇异积分方程与边值问题”的研究上是有成绩的，这个方向的教学和科研队伍已经形成，并且还在进一步壮大和发展。因此本书的出版不仅可满足这个方向的大学高年级学生的学习需要，而且也可作为有关研究生的教学材料。由于广义解析函数有着明显的实际背景，它在流体力学、弹性力学等方面有着广泛和重要的应用，因此本书也可供从事应用数学的科技工作者参阅。

本书的出版是集体工作的成果，因为不少同志都参加了本书的编写和审阅工作。本书的第一章、第四章是由杨广武、许克明、高善智起草的，第二章、第六章是由黄沙、李生训编写的，而第三章、第五章是由闻国椿书写的，闻国椿还对全书的初稿作了修改和补充，并写了序言和参考文献．参加编写本书的全体同志又分别审阅了全书各章的内容。在编写本书时，我们力图做到

由浅入深，以便于读者学习，但限于作者的水平，缺点和错误在所难免，欢迎读者批评、指正。

作者

1987年1月

目　录

第一章　一些积分及其性质

本章的内容是以后各章讨论广义解析函数及其拓广的基本工具．这里，我们将先介绍一些函数类，进而介绍广义微商的概念，在此基础上讨论积分 Tf 和 Πf 及其性质．

§1　一些函数类

本节先给出后面经常用到的一些函数类和完备的赋范线性空间．假定 G 是复平面上的一个区域，而 $f(z)\equiv f(x,\ y)$ 是定义在闭区域 $\bar{G}$ 上的一个复函数．

一、$C^m(\bar{G})$，$C_\alpha(\bar{G})$ 和 $C^m_\alpha(\bar{G})$ 类

设函数 $f(z)$ 以及它的直到 m 阶（关于 x，y 的）偏微商都在闭区域 $\bar{G}$ 上连续，那么将写为 $f\in C^m(\bar{G})$．当然，在边界点 z_0 的微商是由区域内部同阶微商的极限来定义：

$$\left(\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}\right)_{z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}\qquad (k,\ l=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

我们规定 $C^0(\bar{G})\equiv C(\bar{G})$，它表示定义在 $\bar{G}$ 上的连续函数集合．

如果用公式

$$(1.1)\qquad C^m(f,\ \bar{G})=C^m(f)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}C\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-l}\partial y^l},\ \bar{G}\right)$$

来定义 $C^m(\bar{G})$ 中元素 f 的范数，其中

$$C\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-l}\partial y^l},\ \bar{G}\right)=\max_{x,y\in\bar{G}}\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-l}\partial y^l}\right|,$$

并用 $\rho(f,\ g)=C^m(f-g)$ 来定义 $C^m(\bar{G})$ 中元素 f 与 g 的距离，那么不难证明 $C^m(\bar{G})$ 构成一个 Banach 型完备空间。显然，$C^m(\bar{G})$ 中的元素有如下性质：若 $f,\ g\in C^m(\bar{G})$，则 $fg\in C^m(\bar{G})$，并且

$$C^m(fg)\leqslant C^m(f)C^m(g).$$

设 $z_1,\ z_2$ 为闭集 $\bar{G}$ 上的任意两点，函数 $f(z)$ 在 $\bar{G}$ 上满足条件

(1.2) $$|f(z_1)-f(z_2)\leqslant H|z_1-z_2|^\alpha,\qquad 0<\alpha\leqslant 1$$

其中 H 和 α 是与点 z_1,z_2 的选择无关的正常数.我们以 $H(f)$ 表示满足不等式(1.2) 中数 H 的下确界,并称它为函数 $f(z)$ 的 Hölder 常数，而 α 称为 Hölder 指数。显然，

$$H(f)\equiv H(f,\ \alpha,\ \bar{G})=\sup_{z_1,z_2\in\bar{G}}\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|^\alpha},$$

(1.3) $$|f(z_1)-f(z_2)|\leqslant H(f)|z_1-z_2|^\alpha,\ 0<\alpha\leqslant 1.$$

不等式 (1.3) 称为 Hölder 条件。今后，我们用 $H_\alpha(\bar{G})$ 表示满足 (1.3) 且具有同一指数 α 的函数集合，这样的函数集合，也有时叫作 Hölder 函数类。

易知，如果 $f(z)\in H_\alpha(\bar{G})$，那么 $|f(z)|$ 也将属于 $H_\alpha(\bar{G})$。另外，如果 G 有界而且 $f(z)\in H_\alpha(\bar{G})$，则它也将属于 $H_\beta(\bar{G})$，其中 $\beta\leqslant\alpha$。

对于满足 Hölder 条件 (1.3) 的一切（具有同一指数 α 的）有界函数的集合，我们用记号 $C_\alpha(\bar{G})$ 表示。如果 G 是有界区域，则 $C_\alpha(\bar{G})\equiv H_\alpha(\bar{G})$，而当 G 为无界域时，$C_\alpha(\bar{G})\subset H_\alpha(\bar{G})$。

设 $f(z)\in C_\alpha(\bar{G})$，我们用公式

(1.4) $$C_\alpha(f,\ \bar{G})\equiv C_\alpha(f)=C(f,\ \bar{G})+H(f,\ \alpha,\ \bar{G})$$

来定义集合 $C_\alpha(\bar{G})$ 中元素 f 的范数，那么 $C_\alpha(\bar{G})$ 就成为一个

Banach 型完备空间。

定理 1.1 线性赋范空间 $C_\alpha(\bar{G})$ 是 Banach 型空间。

证 实际上，我们只证其完备性即可。在 $C_\alpha(\bar{G})$ 中用 $\rho(f, g)=C_\alpha(f-g)$ 来定义元素 f 与 g 的距离，并设 $\{f_n(z)\}$ 为 $C_\alpha(\bar{G})$ 中的任意一个 Cauchy 序列，即对于任给的 $\varepsilon>0$，必存在自然数 $N(\varepsilon)$，使得当 $m, n\geqslant N(\varepsilon)$ 时，不等式

$$\rho(f_m, f_n)=C_\alpha(f_m-f_n)=C(f_m-f_n)+H(f_m-f_n)<\varepsilon$$

成立，由此有

$$C(f_m-f_n)<\varepsilon, \quad H(f_m-f_n)<\varepsilon. \tag{1.5}$$

根据空间 $C(\bar{G})$ 的完备性并利用 (1.5)，易知存在一个 $f\in C(\bar{G})$ 并且 $f\in C_\alpha(\bar{G})$。于是令 (1.5) 中的 $n\to\infty$，得

$$C(f_m-f)\leqslant\varepsilon,\ H(f_m-f)\leqslant\varepsilon,$$

从而

$$\rho(f_m, f)=C(f_m-f)+H(f_m-f)\leqslant 2\varepsilon$$

因而当 $m\to\infty$ 时，$\rho(f_m, f)\to 0$。这就表明 $C_\alpha(\bar{G})$ 是一个完备空间。

显然，若 $f, g\in C_\alpha(\bar{G})$，则 $fg\in C_\alpha(\bar{G})$，并有

$$C_\alpha(fg)\leqslant C_\alpha(f)C(g)+C(f)C_\alpha(g), \tag{1.6}$$

$$C_\alpha(fg)\leqslant C_\alpha(f)C_\alpha(g), \tag{1.7}$$

设 $f\in C_\beta(\bar{G})$，而 $g(u)$ 是在函数 $u=f(z)$ 所取值的集合上给定的属于 C_α 类的函数，则

$$h(z)\equiv g[f(z)]\in C_{\alpha\beta}(\bar{G}).$$

这是因为

$$|h(z_1)-h(z_2)|\leqslant|g[f(z_1)]-g[f(z_2)]|\leqslant H_\alpha(g)|f(z_1)-f(z_2)|^\alpha$$
$$\leqslant H(g)[H_\beta(f)]^\alpha|z_1-z_2|^{\alpha\beta}.$$

在上述 $C^m(\bar{G})$ 与 $C_\alpha(\bar{G})$ 函数类的基础上，我们考虑 $C_\alpha^m(\bar{G})$ 函数类，该类中的函数是满足条件

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k}\in C_\alpha(\bar{G}) \quad (k=0,\ 1,\cdots,\ m),\ 0<\alpha\leqslant 1$$

的空间 $C^m(\bar{G})$ 中的元素。若用公式

$$(1.8)\qquad C_\alpha^m(f,\ \bar{G})\equiv C_\alpha^m(f)=C^m(f)+\sum_{k=0}^{m}H\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k},\ \alpha,\ \bar{G}\right)$$

来定义 $C_\alpha^m(\bar{G})$ 中元素的范数，那么易知 $C_\alpha^m(\bar{G})$ 成为一个 Banach 型完备空间。

若 $f,\ g\in C_\alpha^m(\bar{G})$，那么 $fg\in C_\alpha^m(\bar{G})$，并且

$$(1.9)\qquad C_\alpha^m(fg,\ \bar{G})\leqslant C_\alpha^m(f)C_\alpha^m(g).$$

今后，用 E 表示全平面，而用 E_1 表示单位圆 $|z|\leqslant 1$，记号 $C^m(E)(C_\alpha^m(E))$ 将被理解为适合条件：$f(z)$ 和$f\left(\frac{1}{z}\right)\in C^m(E_1)$ $(C_\alpha^m(E_1))$ 的 $f(z)$ 的集合，类似地也可以讨论 Banach 型空间 $C^m(E)$ 和 $C_\alpha^m(E)$。

二、$L_p(\bar{G})$ 类

用 $L_p(\bar{G})$ 表示在 $\bar{G}$ 上 p 次幂可和函数的集合，并在此集合中定义元素 f 的范数为

$$L_p(f)\equiv L_p(f,\ \bar{G})=\left[\iint_G |f(z)|^p d\sigma_z\right]^{\frac{1}{p}},\ p\geqslant 1$$

关于范数有如下两个不等式：

Hölder 不等式：若 $f_k\in L_{p_k}(\bar{G})$，$k=1,\ 2,\cdots,\ n$，并且

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{P_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}\leqslant 1,$$

则 $f_1f_2\cdots f_n\in L_p(\bar{G})$，并且

$$(1.10)\qquad L_p(f_1f_2\cdots f_n)\leqslant L_{p_1}(f_1)L_{p_2}(f_2)\cdots L_{p_n}(f_n),\ p\geqslant 1.$$

Minkowski 不等式：若 $f_1,\ f_2,\cdots,f_n\in L_p(\bar{G})$，则 $f_1+f_2+\cdots$

$+f_n\in L_p(\bar{G})$，并且

(1.11) $L_p(f_1+f_2+\cdots+f_n)\leq L_p(f_1)+L_p(f_2)+\cdots+L_p(f_n)$,

$p\geq 1$.

下面证明线性赋范空间 $L_p(\bar{G})$ 是完备的。

定理 1.2 $L_p(\bar{G})$ 是一个 Banach 空间。

证 我们用 $\rho(f, g)=L_p(f-g)$ 来定义 $L_p(\bar{G})$ 中元素 f 与 g 的距离，只要证明下列事实就可以了：若 $\{f_n\}$ 是 $L_p(\bar{G})$ $(1\leq p<\infty)$ 中的任意一个 Cauchy 序列，则存在一个元素 $f\in L_p(\bar{G})$，使得 $\{f_n\}$ 在 $L_p(\bar{G})$ 中收敛于 f。

事实上，由于

$$\lim_{m,n\to\infty} L_p(f_m-f_n)=0,$$

因而能从 $\{f_n\}$ 中选出一个子序列 $\{f_{n_k}\}$，使其满足

$$L_p(f_{n_{k+1}}-f_{n_k})\leq\frac{1}{2^k}.$$

作函数 $g_m=|f_{n_0}|+\sum_{k=1}^{m}|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|$，因为对每一 $z\in\bar{G}$，序列 $\{g_m\}$ 是单调上升的，所以

$$\lim_{m\to\infty} g_m(z)=g(z).$$

由 Levi 渐升函数列积分定理和 Minkowski 不等式得到

$$\iint_G [g(z)]^p d\sigma_z=\iint_G \lim_{m\to\infty}[g_m(z)]^p d\sigma_z$$

$$=\lim_{m\to\infty}\iint_G\left[|f_{n_0}|+\sum_{k=1}^{m}|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\right]^p d\sigma_z$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty}\left\{\left[\iint_G |f_{n_0}|^p d\sigma_z\right]^{\frac{1}{p}} + \sum_{k=1}^{m}\left[\iint_G |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|^p d\sigma_z\right]^{\frac{1}{p}}\right\}^p$$

$$\leqslant \left\{\left[\iint_G |f_{n_0}|^p d\sigma_z\right]^{\frac{1}{p}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\right\}^p < \infty,$$

因而 $g(z)$ 几乎处处有限，且 $g(z)\in L_p(\bar{G})$. 由此得到函数列 $\{f_{n_m}\} = f_{n_0} + \sum_{k=1}^{m}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})\}$ 在 $\bar{G}$ 上几乎处处收敛到可和函数 $f(z)$，且 $f(z)\in L_p(\bar{G})$.

现在证明 $\{f_n\}$ 在 $L_p(\bar{G})$ 中收敛于 $f(z)$. 事实上，根据 Fatou 引理可得

$$(1.12)\qquad \iint_G |f_n - f|^p d\sigma_z = \iint_G \lim_{m\to\infty} |f_n - f_{n_m}|^p d\sigma_z$$

$$\leqslant \varliminf_{m\to\infty} \iint_G |f_n - f_{n_m}|^p d\sigma_z.$$

因为 $\{f_n\}$ 是一个 Canchy 序列，因此对任意给定的 $\varepsilon>0$，当 n, n_m 充分大时，不等式 (1.12) 右端的积分值就小于 ε. 于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，当 n 充分大时，不等式

$$\iint_G |f_n - f|^p d\sigma_z < \varepsilon$$

成立. 由此得到 $\lim_{n\to\infty}\iint_G |f_n - f|^p d\sigma_z = 0$. 故 $L_p(\bar{G})$ 空间是完备的.

我们指出，在 G 是有界域的情况下，显然有关系

$$(1.13)\qquad C_a^m(\bar{G})\subset C^m(\bar{G})\subset L_p(\bar{G})\subset L_q(\bar{G})$$
$$(m\geqslant 0,\ 0<\alpha\leqslant 1,\ p>q\geqslant 1)$$

定义 1.1 设 $f(z)\in L_p(\bar{G})$，如果对于任意 $\varepsilon>0$，都可以找到 $\delta(\varepsilon)>0$，只要当 $|\Delta z|<\delta(\varepsilon)$ 时，就有

$$L_p(f(z+\Delta z)-f(z))<\varepsilon,$$

则称函数 f 在 $L_p(\bar{G})$ 内 p 次平均连续（也就是在度量 $L_p(\bar{G})$ 意义下的连续性），或称函数 f 在 $L_p(\bar{G})$ 内整体连续。

定理 1.3 设 G 为有界域，$f\in L_p(\bar{G})$，当 z 在 G 外时 $f(z)\equiv 0$，则 $f(z)$ 在 G 内是整体连续的。

证 由 Lebesgue 积分的绝对连续性，可知对任意 $\varepsilon>0$，必可找出 $\delta_1(\varepsilon)>0$，使得当可测集 $E\subset G$，$mE<\delta_1(\varepsilon)$ 时，成立不等式

$$(1.14)\qquad \left(\iint_E |f(z)|^p d\sigma_z\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{2^{\frac{1+p}{p}}}.$$

又由 Лузин 定理可知，对 $\delta_1(\varepsilon)>0$，恒有闭集 $F\subset G$，使得 $m(G-F)<\delta_1(\varepsilon)$ 且 $f(z)$ 在 F 上是连续函数。于是 $f(z)$ 在 F 上一致连续，对 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta_2(\varepsilon)>0$，当 $|\Delta z|<\delta_2(\varepsilon)$ 时，成立不等式

$$(1.15)\qquad |f(z+\Delta z)-f(z)|^p<\frac{\varepsilon^p}{2mG}.$$

利用 (1.14)、(1.15) 可知：取 $\delta=\min\{\delta_1(\varepsilon),\ \delta_2(\varepsilon)\}$，则当 $|\Delta z|<\delta$ 时，

$$\left(\iint_G |f(z+\Delta z)-f(z)|^p d\sigma_z\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\iint_F |f(z+\Delta z)-f(z)|^p d\sigma_z+\iint_{G-F} |f(z+\Delta z)-f(z)|^p d\sigma_z\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\iint_F \frac{\varepsilon^p}{2mG}d\sigma_z+\left[\left(\iint_{G-F}|f(z+\Delta z)|^p d\sigma_z\right)^{\frac{1}{p}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\iint_{G-F}|f(z)|^p d\sigma_z\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p\right)^{\frac{1}{p}}<\left(\frac{\varepsilon^p}{2}+\left[\frac{\varepsilon}{2^{\frac{1+p}{p}}}+\frac{\varepsilon}{2^{\frac{1+p}{p}}}\right]^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\frac{\varepsilon^p}{2}+\frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}=\varepsilon.$$

这就证明了 $f\in L_p(\bar{G})$ 的整体连续性。

定义 1.2 设 $f_n\in L_p(\bar{G})$，$f\in L_p(\bar{G})$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}L_p(f_n-f)=0$，则称函数序列 $\{f_n\}$ 以 p 为指数而平均收敛于函数 f，也称$\{f_n\}$在 $L_p(\bar{G})$ 中强收敛于 f。

定义 1.3 设 $f_n\in L_p(\bar{G})$，$f\in L_p(\bar{G})$，$g\in L_q(\bar{G})$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，若

$$\lim_{n\to\infty}\iint_G f_n g d\sigma_z=\iint_G fg d\sigma_z,$$

则称函数序列 $\{f_n\}$ 在 $L_p(\bar{G})$ 中弱收敛于函数 f，记为 $f_n\xrightarrow{弱}f$。

定义 1.4 记 $f_n\in L_p(\bar{G})$，$f\in L_p(\bar{G})$，若对任意固定的数 $a>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\text{mes}E[z||f_n(z)-f(z)|\geqslant a]=0,$$

则称函数序列 $\{f_n\}$ 依测度收敛于函数 f，记为 $f_n\xrightarrow{m}f$。上述三种收敛有如下关系：

定理 1.4 设 $f_n\in L_p(\bar{G})$，$f\in L_p(\bar{G})$，若 $L_p(f_n-f)\to0$（当 $n\to\infty$），则

1) $f_n\xrightarrow{弱}f$； 2) $f_n\xrightarrow{m}f$；

3）从 $\{f_n\}$ 中可以选出子序列 $\{f_{n_k}\}$，它在 G 内几乎处处收敛于 f（简记为 $f_{n_k}\xrightarrow{p.p.}f$）。

证 1）由 Hölder 不等式，可推得

$$\left|\iint\limits_G f_n g d\sigma_z - \iint\limits_G f g d\sigma_z\right| \leqslant \iint\limits_G |f_n - f||g| d\sigma_z$$

$$\leqslant \left\{\iint\limits_G |f_n - f|^p d\sigma_z\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\iint\limits_G |g|^q d\sigma_z\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\to 0 \ (\text{当 } n\to\infty) \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

2）因为对任意固定的 $a>0$，如果

$$A_n(a) = E[z \mid |f_n(z) - f(z)| \geqslant a],$$

则

$$\iint\limits_G |f_n - f|^p d\sigma_z \geqslant \iint\limits_{A_n(a)} |f_n - f|^p d\sigma_z \geqslant a^p \operatorname{mes} A_n(a).$$

由于 a^p 是大于零的常数，故当上式左边趋向于零时，该式的右边 $\operatorname{mes} A_n(a)\to 0$，即 $f_n\xrightarrow{m}f$（当 $n\to\infty$）。

3）由 2）知 $f_n\xrightarrow{m}f$，根据书[160]中 F.Riesz 定理可知必有子列 $\{f_{n_k}\}$，使 $f_{n_k}\xrightarrow{p.p.}f$。

定义 1.5 设集合 $A\subset L_p(\bar{G})$，如果 A 中的任何无穷序列都包含着一个强收敛于 A 中的元素的子序列，则称集合 A 是致密的。

定义 1.6 设集合 $A\subset L_p(\bar{G})$，如果存在常数 $M>0$，使得对任意的 $z\in\bar{G}$ 和任何 $f(z)\in A$，都有 $L_p(f)<M$，那么称集合 A 在 $L_p(\bar{G})$ 中是一致有界的。

定理 1.5 设集合 $A\subset L_p(\bar{G})$，则 A 为致密的充要条件是：

A 在 $L_p(\bar{G})$ 中一致有界并且同等连续（在 $L_p(\bar{G})$ 中度量的意义下）。

定义 1.7 设集合 $A\subset L_p(\bar{G})$，如果 A 中的任何无穷序列都包含着一个弱收敛于 A 中的元素的子序列，则称**集合 A 是弱致密的**。

定理 1.6 设集合 $A\subset L_p(\bar{G})$，则 A 为弱致密的充要条件是：A 在 $L_p(\bar{G})$ 中一致有界。

定理 1.5 和定理 1.6 的证明，可以在书[109]中找到。

三、$L_{p,\nu}(E)$ 类

设定义在全平面 E 上的函数 $f(z)$ 同时满足条件

$$f(z)\in L_p(E_1),\quad f_\nu(z)=|z|^{-\nu}f\left(\frac{1}{z}\right)\in L_p(E_1),\quad p\geqslant 1,$$

其中 E_1 为单位圆 $|z|\leqslant 1$，而 ν 是某个实数。我们把这样的函数集合记为 $L_{p,\nu}(E)$ 或简写为 $L_{p,\nu}$。

如果 $f\in L_p(E)$，$p\geqslant 1$，令 $\zeta=\dfrac{1}{z}$，则有

$$\iint\limits_{|\zeta|>1}|f(\zeta)|^p d\sigma_\zeta=\iint\limits_{|z|<1}|z|^{-4}\left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right|^p d\sigma_z$$

$$=\iint\limits_{|z|<1}\left(|z|^{-\frac{4}{p}}\left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right|\right)^p d\sigma_z.$$

这表明 $L_p(E)\equiv L_{p,\frac{4}{p}}(E)$。

如果 $\lambda\leqslant\dfrac{4}{p}\leqslant\mu$，则对于 $|z|\leqslant 1$，有

$$|z|^{-\lambda p}\leqslant|z|^{-4}\leqslant|z|^{-\mu p},$$

于是

$$\iint_{|z|<1} |z|^{-\lambda p}\left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right|^p d\sigma_z \leqslant \iint_{|z|<1} |z|^{-4}\left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right|^p d\sigma_z$$

$$\leqslant \iint_{|z|<1} |z|^{-\mu p}\left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right|^p d\sigma_z.$$

由此可推出下述关系

(1.16)　$L_{p,\lambda}(E) \supset L_p(E) = L_{p,\frac{4}{p}}(E) \supset L_{p,\mu}(E)$，$p\lambda \leqslant 4 \leqslant p\mu$。

如果用

$$L_{p,\nu}(f) = L_p(f, E_1) + L_p(f_\nu, E_1),\quad p \geqslant 1$$

来定义 $L_{p,\nu}$ 中元素的范数，那么不难证明 $L_{p,\nu}(E)$ 是一个 Banach 型完备空间。

设 $f \in L_{p,\nu}$ 并且 g 为 E 上的有界可测函数，那么 $fg \in L_{p,\nu}$。这是因为，若 $|g| \leqslant M$，那么由

$$\iint_{E_1} |fg|^p d\sigma_z \leqslant M^p \iint_{E_1} |f|^p d\sigma_z,$$

$$\iint_{E_1} |(fg)_\nu|^p d\sigma_z \leqslant M^p \iint_{E_1} |f_\nu|^p d\sigma_z,$$

可推知　$fg \in L_{p,\nu}$。

下面再给出一个定理：

定理 1.7　设 G 为有界域，$f \in L_p(\bar{G})$，而当 $z \bar{\in} \bar{G}$ 时，$f(z) \equiv 0$，ν 为任意实数，那么

1) $L_p(\bar{G}) \subset L_{p,\nu}(E)$；

2) $L_{p,\nu}(f, E) \leqslant M L_p(f, \bar{G})$，（$M$ 为常数）。

证　1) 任取 $f \in L_p(\bar{G})$，由于

$$\iint_{E_1} |f|^p d\sigma_z \leqslant \iint_G |f|^p d\sigma_z;$$

$$\iint\limits_{E_1}|f_\nu|^p d\sigma_z=\iint\limits_{|z|>1}|z|^{p\nu-4}|f|^p d\sigma_z\leqslant\iint\limits_G|z|^{p\nu}|f|^p d\sigma_z$$

$$\leqslant N\iint\limits_G|f|^p d\sigma_z,$$

其中 N 为常数，故知 $f\in L_{p,\nu}(E)$，从而 $L_p(\bar{G})\subset L_{p,\nu}(E)$。

2) 任取 $f\in L_p(\bar{G})$，则由

$$L_{p,\nu}(E)=L_p(f,\ E_1)+L_p(f_\nu,E_1)$$

$$=\left(\iint\limits_{E_1}|f|^p d\sigma_z\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\iint\limits_{|z|>1}\left(|z|^{\nu-\frac{4}{p}}|f(z)|\right)^p d\sigma_z\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\iint\limits_G|f|^p d\sigma_z\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\iint\limits_G(|z|^\nu|f(z)|)^p d\sigma_z\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant(1+M_0)\left(\iint\limits_G|f|^p d\sigma_z\right)^{\frac{1}{p}}$$

易知 $L_{p,\nu}(f,\ E)\leqslant ML_p(f,\ \bar{G})$，其中常数 $M=1+M$。

四、$\dot{D}_\infty(G)$ 和 $\mathfrak{A}_0(G)$ 类

设 f 是定义在域 G 上的函数，集合 $\{z\in G|f(z)\neq 0\}$ 的闭包，即 $\overline{\{z\in G|f(z)\neq 0\}}$ 称为 $f(z)$ 的支集，记为 suppf。

设 $f\in C^m(G)$ 并且 suppf$\subset G$，这样的函数集合记作 $\dot{D}_m(G)$。而对 $\dot{D}_m(G)$ 中具有任意阶偏微商的函数所组成的子集，则用 $D_\infty(G)$ 表示。

函数类 $\dot{D}_\infty(G)$［包括任何的 $\dot{D}_m(G)$］的重要性质就在于它在空间 C, C^m_α 和 L_p 中是稠密的。

定理 1.8 设 $1\leqslant p<\infty$，则 $\dot{D}_\infty(G)$ 在 $L_p(\bar{G})$ 中稠密。

证　我们给出 $D_\infty(E)$ 中的一个元素：令

$$R=\iint\limits_{|z|<1}\exp\left(-\frac{1}{1-|z|^2}\right)d\sigma_z.$$ 定义

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{R}\exp\left(-\dfrac{1}{1-|z|^2}\right), & |z|<1.\\ 0, & |z|\geqslant 1.\end{cases}$$

则 $g(z)$ 具有性质：

(A) $g(z)\in D^0_\infty(E)$；　(B) $\iint\limits_E g(z)d\sigma_z=1$；

(C) $0\leqslant g(z)\leqslant\dfrac{1}{Re}$；(D) $\operatorname{supp}g(z)=\{z\in E\,|\,|z|\leqslant 1\}$.

对任意实数 $\delta>0$，作函数

$$g_\delta(z,\ t)=\delta^{-2}g\left(\frac{z-t}{\delta}\right),$$

那么

$$\iint\limits_E g_\delta(z,\ t)d\sigma_t=1.$$

设 $f\in L_1(\bar{G})$，作函数 $\tilde{f}=\begin{cases}f, & z\in\bar{G},\\ 0, & z\bar{\in}\bar{G},\end{cases}$ 则 $\tilde{f}\in L_1(E)$. 再定义函数

$$(1.17)\quad G_\delta f(z)=\iint\limits_E\tilde{f}(z-\delta t)g(t)d\sigma_t=\iint\limits_E\tilde{f}(t)g_\delta(z,\ t)d\sigma_t,$$

那么 $G_\delta f(z)$ 有以下性质：

(1) 如果 $f\in L_1(G)$，那么由于 $g_\delta(z,\ t)=\delta^{-2}g\left(\dfrac{z-t}{\delta}\right)$ 关

于 z 是一个无穷次可微函数，各阶导数在 $|z-t|\geqslant\delta$ 上等于零，若用 D_z^m 表示各阶微分算子，则

$$(1.18)\qquad D_z^m G_\delta f(z)=\iint_E \tilde{f}(t) D_z^m g_\delta(z,\ t)\,d\sigma.$$

这表明 $G_\delta f(z)\in C^\infty(E)$。

(2) 若 $\bar{K}\in G$，$f\in L_1(\bar{G})$ 且在 $G\backslash K$ 上等于零，又 $\delta<\mathrm{dist}(K,\ \Gamma)=\inf\limits_{z_1\in K,\ z_2\in\Gamma}\mathrm{dist}(z_1,\ z_2)$，$\Gamma$ 为 G 之边界，则有

$$(1.19)\qquad G\delta f(z)=\iint_E \tilde{f}(z-\delta t)g(t)\,d\sigma_t$$

$$=\iint_{|t|<1}\tilde{f}(z-\delta t)g(t)\,d\sigma_t.$$

记 $K_\delta=\{z\in E|\mathrm{dist}(z,\ K)<\delta\}$，集合

$$B(z,\ \delta)=\{z-\delta t\,||t|\leqslant 1\}$$

是以 z 为心，δ 为半径的闭圆。当 $z\bar{\in}K_\delta$ 时，$B(z,\ \delta)\cap K=\phi$，根据假定 f 在 $G\backslash K$ 上等于零。由此知 $\tilde{f}$ 在 $B(z,\ \delta)$ 上的值是零。因而由 (1.19) 可得出

$$G_\delta f(z)=0,\qquad \forall z\bar{\in}K_\delta.$$

联合 (1.18) 可推得 $G_\delta f(z)\in D_\infty(G)$。

(3) 如果 $f\in L_p(\bar{G})(1\leqslant p<\infty)$，则 $G_\delta f(z)$ 在 $L_p(\bar{G})$ 中收敛于 f。

事实上，对 $1\leqslant p<\infty$，若 $f\in L_p(\bar{G})$，则 $f\in L_1(\bar{G})$，由 (2) 知 $G_\delta f\in D_\infty(\bar{G})$。又

$$G_\delta f(z)-f(z)=\iint_{|t|<1}[\tilde{f}(z-\delta t)-\tilde{f}(z)]g(t)\,d\sigma_t,$$

$$\iint_G \left|G_\delta f - f\right|^p d\sigma_z = \iint_G \left| \iint_{|t|<1} (\tilde{f}(z-\delta t) - \tilde{f}(z)) g(t) d\sigma_t \right|^p d\sigma_z$$

$$\leqslant \iint_G \left| \left(\iint_{|t|<1} \left|\tilde{f}(z-\delta t) - \tilde{f}(z)\right|^p d\sigma_t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_{|t|<1} \left|g(t)\right|^q d\sigma_t \right)^{\frac{1}{q}} \right|^p d\sigma_z$$

$$\leqslant M \iint_G \left(\iint_{|t|<1} \left|\tilde{f}(z-\delta t) - \tilde{f}(z)\right|^p d\sigma_t \right)^{\frac{1}{p}} d\sigma_z,$$

其中 M 是由 $g(t)$ 的有界性得到的常数。根据函数 $\tilde{f}$ 的整体连续性可知当 $\delta\to 0$ 时，上述不等式右边趋于零。从而

$$\lim_{\delta\to 0} L_p(G_\delta f - f) = 0.$$

显然，取对应于 $\delta\to 0$ 的一串函数 $G_\delta f$，构成一个有任何阶连续导数的函数列 $\{G_\delta f\}$，此函数列强收敛于函数 $f\in L_p(\bar{G})$，故得 $D_\infty^{\cdot}(G)$ 类在 $L_p(\bar{G})$ 中稠密。

相应地我们引入下述定理：

定理1.9 设 G^* 是包含 $\bar{G}$ 的开集，则存在序列 $f_n\in D_\infty^{\cdot}(G_*)$，它按 $C_\alpha^m(\bar{G})$ 中的度量收敛于 $f\in C_\alpha^m(\bar{G})$，即

$$\lim_{n\to\infty} C_\alpha^m(f_n - f,\ \bar{G}) = 0.$$

另外，有时我们需要考虑函数集合 $\mathfrak{A}^*(G)$，它的元素 $\Phi(z)$ 是 G 中的关于 z 的单值解析函数，并且在 G 的内部 $\Phi(z)$ 可以有孤立奇点（极点和本性奇点）的离散集合。显然

$$f\pm g,\ \ fg,\ \ \frac{f}{g}\in \mathfrak{A}^*(G).$$

若 $g(z)$ 的值属于 $f(z)$ 的定义域，则 $f(g(z))\in\mathfrak{A}^*(G)$。

以后还会遇到在 G 内连续的解析函数类，它是 $\mathfrak{A}^*(G)$ 与 $C(G)$ 的交集，记为

$$\mathfrak{A}_c(G) \equiv \mathfrak{A}^*(G)\cap C(G) = \mathfrak{A}^*(G)C(G)$$

五、曲线上的函数类

设Γ是复平面上的一条简单闭的或非闭的可求长 Jordan 曲线，其方程可以写为

$$z(s)=x(s)+iy(s),\qquad (0\leqslant s\leqslant l).$$

这里 $z(s)$ 是曲线Γ上对应于弧长 s 的点，而 s 是由Γ上某固定点算起的。如果函数 $z(s)$ 直到m阶的导数，都在闭区间 $0\leqslant s\leqslant l$ 上连续，则称曲线Γ属于C^m类。如果第m阶导数 $z^m(s)$ 在 $0\leqslant s\leqslant l$ 上还满足指数为 $\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ 的 Hölder 条件：

$$|z^m(s_1)-z^m(s_2)|\leqslant H|s_1-s_2|^\alpha \quad 0\leqslant s_1,\ s_2\leqslant l,\ 0<\alpha\leqslant 1,$$

其中 H 和 α 是与 s_1，s_2 无关的正常数，则称 $\Gamma\in C_\alpha^m$。

设在简单可求长 Jordan 曲线上给定函数 $f(z)$，$z\in\Gamma$，我们把它当作弧长 s 的函数 $f(z(s))=f(s)$。如果 $f(s)$以及它的直到 m 阶微商都在闭区间 $0\leqslant s\leqslant l$ 上连续，则说 f 属于 $C^m(P)$类，即 $f\in C^m(\Gamma)$。此外，如果 $f^{(m)}(s)$满足指数为 $\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$的 Hölder 条件，那么就说 $f\in C_\alpha^m(\Gamma)$。

如果分别以下述方式定义元素的范数：

$$C^m(f,\Gamma)=\sum_{k=0}^{m} C\left(\frac{d^kf}{ds^k},\ \Gamma\right),\quad 当\ f\in C^m(\Gamma).$$

$$C_\alpha^m(f,\Gamma)=C^m(f,\Gamma)+H\left(\frac{d^mf}{ds^m},\ \Gamma,\ \alpha\right),\quad 当\ f\in C_\alpha^m(\Gamma).$$

那么集合$C^m(\Gamma)$与$C_\alpha^m(\Gamma)$将成为 Banach 型完备空间，其中

$$C(f,\Gamma)\equiv\max_{0\leqslant s\leqslant l}|f(s)|,$$

$$H(f,\Gamma,\alpha)\equiv\sup_{0\leqslant s_1,s_2\leqslant l}\frac{|f(s_1)-f(s_2)|}{|s_1-s_2|^\alpha}.$$

§2 广义微商的概念

一、运算$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$，$\frac{\partial}{\partial z}$的引入与 Green 公式

设 $z=x+iy$，$w(z)=u+iv$，我们引入下述两种运算

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-i\frac{\partial w}{\partial y}\right), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

以上两式分别称为 w 对于 z 和 $\bar{z}$ 的偏微商。显然，w 对于 x 和 y 的偏微商可由(2.1)导出

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial \bar{z}},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=i\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right).$$

于是(2.1)式又可写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right],\\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right].\end{cases} \tag{2.2}$$

如果对解析函数 $\Phi(z)$ 施以运算 $\frac{\partial}{\partial z}$，$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$，则由(2.2)可知

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}=\Phi'(z),\ \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}}=0. \tag{2.3}$$

由此可见，(2.3)的第一个等式就是解析函数对自变量的微商，而第二个等式是 Cauchy-Riemann 方程组的复数写法。

如果 $w\in C^1(G)$，而 $\Phi\in \mathfrak{A}(G)$，则显然有

$$(2.4)\qquad \frac{\partial(\Phi w)}{\partial z}=\Phi\frac{\partial w}{\partial z},\quad \frac{\partial(\Phi w)}{\partial \bar z}=\Phi\frac{\partial w}{\partial \bar z}.$$

使用运算符号$\frac{\partial}{\partial z}$与$\frac{\partial}{\partial \bar z}$，可以给出Green公式的复形式。设$G$为有界域，其边界$\Gamma$是一些简单的逐段可求长闭曲线，若$w\in C^1(\bar G)$，则由(2.2)利用Green公式，可得

$$(2.5)\qquad \iint_G \frac{\partial w}{\partial \bar z}d\sigma_z=\frac{1}{2}\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Gamma vdx+udy+i(-udx+vdy)$$

$$=\frac{1}{2i}\int_\Gamma w(z)dz;$$

类似可得

$$(2.6)\qquad \iint_G \frac{\partial w}{\partial z}d\sigma_z=\frac{-1}{2i}\int_\Gamma w(z)d\bar z.$$

公式(2.5)，(2.6)即为Green公式的复数写法。不难看出，若$w(z)\in C(\bar G)\cap C^1(G)$，只要选闭子域序列$\bar G_n\subset G$，使得$G_n$的边界$\Gamma_n$为一些逐段的可求长闭曲线，且当$n\to\infty$时，$G_n\to G$，那么上述公式仍然成立。

二、非齐次 Cauchy-Riemann 复方程的解

考虑非齐次 Cauchy-Riemann 方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=g(x,\ y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=h(x,y),$$

其中g与h是关于变量x，y的已知实函数。利用(2.2)式，上述方程组可化为复形式

$$(2.7)\qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=f(z),\quad f=\frac{g+ih}{2},\quad w(z)=u+iv.$$

为了给出 (2.7) 的解的表示式，我们还必须给出 Pompeiu 公式.

设 $\zeta\in G$, $w(z)\in C(\bar{G})\cap C^1(G)$, 对 $\varepsilon>0$, 记区域 G 与 $|z-\zeta|>\varepsilon$ 的交集为 G_ε, $G_\varepsilon\subset G$. 考虑函数 $w(z)$ 与 $\Phi(z)=\dfrac{1}{z-\zeta}$, 有

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w\Phi)=\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\Phi+w\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\Phi,\quad \text{当 } z\in G_\varepsilon.$$

在 G_ε 上对 $w\Phi$ 使用公式(2.5)

$$(2.8)\qquad \iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w\Phi)\,d\sigma_z=\frac{1}{2i}\int_\Gamma w\Phi\,dz-\frac{1}{2i}\int_{|z-\zeta|=\varepsilon}w\Phi\,dz,$$

由于

$$\frac{1}{2i}\int_{|z-\zeta|=\varepsilon}\frac{w(z)}{z-\zeta}dz$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{|z-\zeta|=\varepsilon}\frac{w(\zeta)}{z-\zeta}dz+\frac{1}{2i}\int_{|z-\zeta|=\varepsilon}\frac{w(z)-w(\zeta)}{z-\zeta}dz\longrightarrow$$

$$\pi w(\zeta)\quad (\text{当 } \varepsilon\to 0),$$

于是令 $\varepsilon\to 0$, 由(2.8)可得

$$\iint\limits_G\frac{\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}}{z-\zeta}\,d\sigma_z=\frac{1}{2i}\int_\Gamma\frac{w(z)}{z-\zeta}dz-\pi w(\zeta).$$

由此推得 Pompeiu 公式

$$(2.9)\qquad w(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{w(z)}{z-\zeta}dz-\frac{1}{\pi}\iint\limits_G\frac{\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}}{z-\zeta}\,d\sigma_z,$$

类似地还有

$$(2.10)\qquad w(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{w(z)}{\bar z-\bar\xi}d\bar z-\frac{1}{\pi}\iint_{G}\frac{\frac{\partial w}{\partial z}}{\bar z-\bar\xi}d\sigma_z.$$

现在考虑复方程 (2.7)。若 $f\in C(G)$，那么由 (2.9) 立即得出(2.7)的解 $w(z)\in C(\bar G)\cap C^1(G)$的表示式

$$(2.11)\qquad w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{G}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta$$

$$\equiv\Phi(z)+Tf,$$

其中

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\qquad Tf=-\frac{1}{\pi}\iint_{G}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta.$$

积分 $Tf=-\frac{1}{\pi}\iint_{G}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta$ 如何计算？在这里，我们只就 $f=f(x,\ y)$是变量 x，y 的解析函数，给出计算 Tf 的较简单的公式。

把 $x=\frac{1}{2}(z+\bar z)$，$y=\frac{1}{2i}(z-\bar z)$代入 $f(x,\ y)$，并计算不定积分

$$F(z,\bar z)=\int f\left(\frac{z+\bar z}{2},\ \frac{z-\bar z}{2i}\right)d\bar z,$$

显然$\frac{\partial F(z,\bar z)}{\partial\bar z}=f$，于是利用公式(2.9)可得

$$(2.12)\qquad Tf=F(z,\bar z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(\zeta,\bar\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\ \ z\in G.$$

若 $z\bar\in\bar G$，则仿(2,9)的导出，可得

$$(2.13)\qquad Tf=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\xi,\eta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta=\frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{F(\zeta,\bar\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

这表明 Tf 在 $G+\Gamma$ 外是连续的，并且在 $z=\infty$ 变为 0. 若记

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{F(\zeta,\bar\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\bar\in\Gamma.$$

那么，根据 Сохоцкий-Plemelj 公式可推得

$$F(t,\bar t)-\Phi^+(t)=-\Phi^-(t),\quad t\in\Gamma.$$

由此知(2.12)与(2.13)的右端在 G 的边界 Γ 上相等，从而积分 Tf 在全平面上连续.

例 设 $G:|z|<1$，$\Gamma:|z|=1$，$f=z^n\bar z^m$，n 与 m 均为非负整数，算出不定积分

$$F(z,\bar z)=\int z^n\bar z^m d\bar z=\frac{1}{m+1}z^n\bar z^{m+1}+C.$$

当 $z\in G$ 时，由公式(2.12)可得

$$Tf=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\zeta^n\bar\zeta^m}{\zeta-z}d\sigma_\zeta=\begin{cases}\dfrac{z^n\bar z^{m+1}}{m+1}-\dfrac{z^{n-m-1}}{m+1}, & \text{当 } n\geqslant m+1,\\[2ex] \dfrac{z^n\bar z^{m+1}}{m+1}, & \text{当 } n<m+1.\end{cases}$$

而当 $z\bar\in\bar G$ 时，由公式(2.13)，得

$$Tf=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{F(\zeta,\bar\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}0, & \text{当 } n\geqslant m+1,\\[2ex] \dfrac{z^{n-m-1}}{m+1}, & \text{当 } n<m+1.\end{cases}$$

三、Tf 属于 $L_p(\bar G)(1\leqslant p<2)$ 的性质

引理 2.1 设 $f\in L_p(\bar G)$ 且在有界域 G 外，$f=0$. 若 $\lambda<2$，则当 $p>\dfrac{2}{2-\lambda}$ 时，函数

$$(2.14)\qquad g(z)=\iint_G \frac{f(\zeta)}{|\zeta-z|^{\lambda}}d\sigma_\zeta=\iint_E \frac{f(\zeta+z)}{|\zeta|^{\lambda}}d\sigma_\zeta$$

在全平面连续。

证 (2.14)中的第二个积分可视为取在以 $z=0$ 为心，以固定的 R 为半径的圆 $G_R\supset\bar{G}$ 上，考察

$$g(z_1)-g(z_2)=\iint_{G_R}\frac{f(\zeta+z_1)-f(\zeta+z_2)}{|\zeta|^{\lambda}}d\sigma_\zeta,$$

利用 Hölder 不等式可得

$$|g(z_1)-g(z_2)|$$

$$\leqslant\left(\iint_{G_R}\left|f(\zeta+z_1)-f(\zeta+z_2)\right|^p d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{p}}\left(\iint_{G_R}\left|\zeta\right|^{-\lambda q}d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

由于 $p>\frac{2}{2-\lambda}$，$\lambda<2$，于是$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}>\frac{\lambda}{2}$，从而 $\lambda q<2$，所以

$$\left(\iint_{G_R}\left|\zeta\right|^{-\lambda q}d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{q}}<M\ (\text{常数}).$$

根据定理 1.3，易知当 $|z_1-z_2|\to 0$ 时

$$\left(\iint_{G_R}\left|f(\zeta+z_1)-f(\zeta+z_2)\right|^p d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{p}}\to 0,$$

由此推出 $g(z)$的连续性。这就是所要证明的。

定理 2.1 若 G 为有界域且 $f\in L_1(\bar{G})$，则积分

$$(2.15)\qquad Tf\equiv T_Gf=\frac{-1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta,$$

(2.16) $$Tf\equiv T_G f=\frac{-1}{\pi}\iint\limits_G \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta,$$

对于 $\bar{G}$ 外所有的点 z 存在，并且 $T_G f$ 与 $\bar{T}_G f$ 在 $\bar{G}$ 外分别对 z，$\bar{z}$ 解析，同时在∞处均变为零。

证 由于

$$|Tf|\leqslant\frac{1}{\pi}\iint\limits_G\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|}d\sigma_\zeta\leqslant\frac{1}{\min\limits_{\zeta\in G}|\zeta-z|}\iint\limits_G|f(\zeta)|d\sigma_\zeta,$$

易知 Tf 与 $\bar{T}f$ 对于 $\bar{G}$ 外的所有 z 点存在。其余结论显然成立。

引理 2.2 设 $g\in L_q(\bar{G})$，$q>2$，并且在 $\bar{G}$ 外 $g=0$，若 $f(z)g(z)\in L_1(\bar{G})$，则 $f\in L_p(\bar{G})$，$p=\dfrac{q}{q-1}$。

证 利用反证法。假定 $f\bar{\in} L_q(\bar{G})$。用 E_k 表示在 $\bar{G}$ 上适合 $k\leqslant|f|\leqslant k+1(k=0,1,\cdots)$ 的点集，再从集合序列 $\{E_k\}$ 中依次删去那些零测度集合，把剩下的子集列记为 $\{E_{k_j}\}(j=0,1,2,\cdots)$。

设 $m_j=m(E_{k_j})$，则由反证的假定可知 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}k_j^p m_j=+\infty$。令

$$A_n=\sum_{j=0}^{n}k_j^p m_j,$$ 则有 $A_n\to+\infty$（当 $n\to\infty$）。作函数

$$g(z)=\begin{cases}0, & \text{当 } z\bar{\in}E_{k_j},\\ (A_{j-1}^{-\alpha}-A_j^{-\alpha})^{\frac{1}{q}}/(m_j)^{\frac{1}{q}}, & \text{当 } z\in E_{k_j},\end{cases}\quad(0<\alpha<1)$$

显然

$$m_j[g(z)]^q=(A_{j-1}^{-\alpha}-A_j^{-\alpha}),\quad(A_{-1}=A_0).$$

从而

$$\iint\limits_G|g(z)|^q d\sigma_z=\sum_{j=0}^{\infty}m_j[g(z)]^q=\sum_{j=0}^{\infty}(A_{j-1}^{-\alpha}-A_j^{-\alpha})<\infty.$$

这表明 $g(z)\in L_q(\bar{G})$，$(q>2)$。

但是，另一方面又有

$$\iint_G |fg|d\sigma_z \geqslant \sum_{j=0}^{\infty} k_j(A_{j-1}^{-a}-A_j^{-a})^{\frac{1}{q}} m_j^{-\frac{1}{q}} m_j$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} k_j(A_{j-1}^{-a}-A_j^{-a})^{\frac{1}{q}} m_j^{\frac{1}{p}} \geqslant \sum_{j=0}^{\infty} k_j m_j^{\frac{1}{p}}\left(\int_{A_{j-1}}^{A_j} a x^{-a-1}dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geqslant \sum_{j=0}^{\infty} a^{\frac{1}{q}}(A_j-A_{j-1})^{\frac{1}{p}} A_j^{-\frac{1+a}{q}}(A_j-A_{j-1})^{\frac{1}{q}}$$

$$\geqslant a^{\frac{1}{q}}\sum_{j=0}^{\infty}(A_j-A_{j-1})A_j^{-\frac{1+a}{q}}$$

$$\geqslant a^{\frac{1}{q}}\sum_{j=0}^{N}(A_j-A_{j-1})A_N^{-\frac{1+a}{q}}$$

$$\geqslant a^{\frac{1}{q}}(A_N-A_0)A_N^{-\frac{1+a}{q}}.$$

取 N 足够大，可使 $A_N-A_0\geqslant\frac{1}{2}A_N$。于是由 $q>2>1+a$ 可知

$$\iint_G |fg|d\sigma_z \geqslant \frac{1}{2}a^{\frac{1}{q}} A_N^{1-\frac{1+a}{q}} \to\infty \quad (\text{当 } N\to\infty).$$

这与条件 $fg\in L_1(\bar{G})$ 相矛盾，因而 $f\in L_p(\bar{G})$，$p=\dfrac{q}{q-1}$。

定理 2.2 设 G 为有界域，$f\in L_1(\bar{G})$，则 Tf 和 $\bar{T}f$ 作为 $z\in G$ 的函数是几乎处处存在的，并且属于 $L_q(\bar{G}_*)$，$1\leqslant p<2$，

其中 G_* 是平面上的任意有界域.

证 设 $g(z)\in L_q(\bar{G})$, $q>2$, 并且在 G 外 $g(z)=0$, 取 $\lambda=1$, 则由引理 2.1, 函数

$$g_1(z)=\iint_G \frac{|g(\zeta)|}{|\zeta-z|}d\sigma_\zeta$$

在 E 上连续, 因而 $|f(z)|g_1(z)\in L_1(\bar{G})$. 根据 Fubini 定理推得

$$\iint_G |f|g_1 d\sigma_z=\iint_G |f(z)|\left(\iint_G \frac{|g(\zeta)|}{|\zeta-z|}d\sigma_\zeta\right)d\sigma_z$$

$$=\iint_G |g(\zeta)|\left(\iint_G \frac{|f(z)|}{|\zeta-z|}d\sigma_z\right)d\sigma_\zeta$$

$$=\iint_G |g(\zeta)|f_1(\zeta)d\sigma_\zeta,$$

其中

$$f_1(\zeta)=\iint_G \frac{|f(z)|}{|\zeta-z|}d\sigma_z.$$

再由引理 2.2, 对任意的 $g(z)\in L_q(\bar{G})$, $g>2$, 可推知 $f_1\in L_p(\bar{G})$, $p=\dfrac{q}{q-1}<2$. 注意到 $|Tf|\leqslant\dfrac{1}{\pi}\iint_G \dfrac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|}d\sigma_\zeta$ $=\dfrac{1}{\pi}f_1(z)$, 所以 $Tf\in L_p(\bar{G})$, $1\leqslant p<2$. 又由定理 2.1 得知: Tf 在 $\bar{G}$ 外解析且在 $z=\infty$ 处变为零. 故对任意有界域 G_* 有 $Tf\in L_p(\bar{G}_*)$. 显然, 对 $\bar{T}f$ 有类似的结论.

四、广义微商的概念

先给出下述定理:

定理 2.3 若 $f\in L_1(\bar{G})$, 则对于任意的 $\varphi\in D_\infty^0(G)$, 有

(2.17) $$\iint_G Tf\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}d\sigma_z+\iint_G f\varphi d\sigma_z=0,$$

(2.18) $$\iint_G \bar T f\frac{\partial\varphi}{\partial z}d\sigma_z+\iint_G f\varphi d\sigma_z=0.$$

证 因为 $\varphi\in D^0_\infty(G)$，故由公式(2.9)，(2.10)得

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta}\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta}\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z}=T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}\right),$$

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\zeta)}{\bar\zeta-\bar z}d\bar\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{d\sigma_\zeta}{\bar\zeta-\bar z}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{d\sigma_\zeta}{\bar\zeta-\bar z}=\bar T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

根据定理 2.2，可知 $Tf\in L_1(\bar G_*)$。因而由 Fubini 定理，有

$$\iint_G Tf\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}d\sigma_z=\iint_G\left(-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}d\sigma_z$$

$$=\iint_G\frac{1}{\pi}\left(\iint_G\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}\frac{d\sigma_z}{z-\zeta}\right)f(\zeta)d\sigma_\zeta$$

$$=-\iint_G\varphi f d\sigma_\zeta.$$

从而(2.17)式成立。类似地可证(2.18)式。

定义 2.1 （С.Л.Соболев 广义微商）设 $f,g\in L_1(G)$，若对任意的 $\varphi\in D^0_1(G)$，都有

$$(2.19) \qquad \iint\limits_G g\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}d\sigma_z+\iint\limits_G f\varphi d\sigma_z=0$$

$$\left(\text{或}\ \iint\limits_G g\frac{\partial\varphi}{\partial z}d\sigma_z+\iint\limits_G f\varphi\, d\sigma_z=0\right),$$

则称f为函数g对$\bar{z}$（或z）的广义微商，记为$f=g_{\bar{z}}$（或$f=g_z$）。

据此定义，可有以下几点：

（1）如果$g\in C^1(G)$，而$f=\dfrac{\partial g}{\partial\bar{z}}$（普通微商）.于是利用公式(2.5)，对任意的$\varphi\in D_\infty^0(G)$推得

$$\iint\limits_G g\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}d\sigma_z+\iint\limits_G f\varphi\, d\sigma_z=\iint\limits_G\frac{\partial(g\varphi)}{\partial\bar{z}}d\sigma_z=\frac{1}{2i}\int\limits_\Gamma g\varphi\, dz=0.$$

这表明广义微商$g_{\bar{z}}=f$，因而$g_{\bar{z}}=\dfrac{\partial g}{\partial\bar{z}}$，也就是说，对于任意$g\in C^1(G)$，其广义微商运算$(\ \ )_{\bar{z}}$与普通微商运算$\dfrac{\partial(\ )}{\partial\bar{z}}$是一致的。所以，今后对$\bar{z}$的广义微商运算象普通微商一样，用$\dfrac{\partial(\ )}{\partial\bar{z}}$来表示，并规定$\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}\equiv f_{\bar{z}}$（类似地对$z$的广义微商也有同样结论，规定$\dfrac{\partial f}{\partial z}\equiv f_z$）。

（2）若$f\in L_1(\bar{G})$，由定理2.2知$Tf\in L_1(G_*)$，又根据定理2.3，有

$$\iint\limits_G Tf\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}d\sigma_z+\iint\limits_G f\varphi\, d\sigma_z=0.$$

因之$(Tf)_{\bar{z}}=f$。由此可见，若$\Phi(z)$为一个解析函数，则$(Tf+\Phi)_{\bar{z}}=f$。类似地有$(\bar{T}f+\bar{\Phi})_z=f$。

(3) 今后我们用 $D_{\bar{z}}(G)$ ($D_z(G)$) 表示在 G 内存在对 $\bar{z}$ (对 z) 的广义微商的函数类. 显然, $g \in D_{\bar{z}}(G)$ 的充要条件是 $\bar{g} \in D_z(G)$. 事实上, 设 $g \in D_{\bar{z}}$, 那么将 (2.19) 式取共轭即得 $\bar{g}_z = \bar{f}$, 故 $\bar{g} \in D_z$, 反之亦然. 因此, 今后只须研究函数类 $D_{\bar{z}}(G)$ 的性质就足够了. 由定理 2.3 显见, 若 $f \in L_1(\bar{G})$, 则 $Tf \in D_{\bar{z}}(G)$, 这是 $D_{\bar{z}}(G)$ 类的一个重要例子.

(4) 我们还要考虑对 z, $\bar{z}$ 具有高于一阶的广义微商的函数. 若 $f(z)$ 在 G 内存在所有的广义微商

$$f_{z^j\bar{z}^k} = \frac{\partial^{j+k} f}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} \quad (j+k \leqslant m,\ j,k = 0, 1, \cdots, m),$$

并且它们都属于 $L_p(\bar{G})$ 类, $p \geqslant 1$, 则称 $f(z)$ 属于 $D_{m,p}(G)$ 类, 记为 $f \in D_{m,p}(G)$ (当 $p = 1$ 时, 也可以用 D_m 表示 $D_{m,1}$) 或 $W_p^{(m)}(G)$. 若用公式

$$D_{m,p}(f, G) = \sum_{j,k=0}^{j+k \leqslant m} L_p\left(\frac{\partial^{j+k} f}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}\right)$$

来定义 $D_{m,p}$ 类中元素的范数, 那么 $D_{m,p}$ 类就成为一个 Banach 型空间.

定理 2.4 若 $g_{\bar{z}} = 0$, $z \in G$, 则 $g(z)$ 在 G 内解析, 即 $g \in \mathfrak{A}_1(G)$.

证 只须证明 g 在 G 内的每一个固定点 z_0 的邻域内解析就够了. 不失一般性, 我们可以取 $z_0 = 0$. 以 $z_0 = 0$ 为中心, R 为半径作一个充分小的圆 G_R, 使 $G_R \subset G$. 考虑对于此圆的双调和 Green 函数

$$H(z, \zeta) = 2|z-\zeta|^2 \log \frac{|R^2 - z\bar{\zeta}|}{R|z-\zeta|} - (R^2 - |z|^2)\left(1 - \frac{|\zeta|^2}{R^2}\right),$$

其中 z, ζ 是 G_R 内的任意点. 在 G_R 中固定 ζ, 可以验证, 当 $z \neq \zeta$ 时, 函数 $H(z, \zeta)$ 满足方程

$$\Delta\Delta H = 0$$

与边界条件

$$H = H_{\bar{z}} = H_z = 0,\ \text{当}\ |z| = R.$$

此外，易知 H，$H_{\bar{z}}$，H_z 在 $\bar{G}_R$ 上连续，先固定 $\zeta \in G_R$ 而后作函数

$$\varphi(z) = \begin{cases} H(z,\zeta), & \text{若}\ |z| \leqslant R, \\ 0, & \text{若}\ |z| > R. \end{cases}$$

显然 $\varphi(z) \in D_1^0(G)$。若 $f = g_{\bar{z}} = 0$，则根据(2.19)式，就有

$$\iint_G g\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}d\sigma_z = \iint_{G_R} g(z)\frac{\partial H(z,\zeta)}{\partial\bar{z}}d\sigma_z$$

$$= \iint_{G_R} f(z)H(z,\zeta)d\sigma_z = 0.$$

此式对任意 $\zeta \in G$ 均成立。现在，对上式两边作运算$(\ \ )_{\zeta\bar{\zeta}}$，则有

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}\iint_{G_R} g(z)\frac{\partial H(z,\zeta)}{\partial\bar{z}}d\sigma_z = \iint_{G_R} g(z)\frac{\partial^3 H(z,\zeta)}{\partial\bar{z}\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}d\sigma_z = 0.$$

经计算得到

$$\frac{\partial^3 H(z,\zeta)}{\partial\bar{z}\partial\zeta\partial\bar{\zeta}} = \frac{1}{\bar{\zeta}-\bar{z}} + \frac{R^2 z - 2R^2\zeta + \bar{z}\zeta^2}{(R^2-\bar{z}\zeta)^2} + \frac{z^2\bar{\zeta}}{R^2(R^2-z\bar{\zeta})},$$

于是

$$\frac{1}{\pi}\iint_{G_R} g(z)\frac{\partial^3 H(z,\zeta)}{\partial\bar{z}\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}d\sigma_z = Tg - \Phi(\zeta) - \Phi_1(\zeta) = 0,$$

其中

$$Tg = -\frac{1}{\pi}\iint_{G_R}\frac{g(z)}{\bar{z}-\bar{\zeta}}d\sigma_z,$$

$$\Phi(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_{G_R} g(z)\frac{R^2 z - 2R^2\zeta + \bar{z}\zeta^2}{(R^2 - \bar{z}\zeta)^2} d\sigma_z,$$

$$\Phi_1(\zeta) = -\frac{1}{\pi R^2}\iint_{G_R} \frac{\bar{g}(z)\bar{z}^2\zeta}{R^2 - \bar{z}\zeta} d\sigma_z.$$

因为 $\Phi(\zeta)$ 与 $\Phi_1(\zeta)$ 在 G_R 内解析，并且 $Tg \in D_\zeta(G_R)$，所以

$$g(\zeta) = (Tg)_\zeta = [\Phi(\zeta) + \overline{\Phi_1(\zeta)}]_\zeta = \Phi'(\zeta).$$

这就表明 g 在 G_R 内解析，从而 $g \in \mathfrak{A}_0(G)$。

五、广义微商的唯一性与局部性

定理 2.5（唯一性） 设 f_1， f_2， $g \in L_1(G)$， 并且 $g_{\bar{z}} = f_1$， $g_{\bar{z}} = f_2$，则 $f_1 = f_2$ 在 G 内几乎处处成立。

证 任取区域 G_0，使 $\bar{G}_0 \subset G$，则对任意的 $\varphi(z) \in D_1^0(G_0)$，有

$$\iint_G g\varphi_{\bar{z}} d\sigma_z + \iint_G f_1 \varphi\, d\sigma_z = 0,$$

$$\iint_G g\varphi_{\bar{z}} d\sigma_z + \iint_G f_2 \varphi\, d\sigma_z = 0,$$

以上二式相减，得

$$\iint_G (f_1 - f_2)\varphi d\sigma_z = 0$$

由此可以断定 $f_1 - f_2 = 0$ 在 G 内几乎处处成立。假若不然，在 G_0 内存在某一个正测度集合 $E(\bar{E} \subset G_0)$，而在 E 上 $f_1 - f_2 \geq c > 0$（或小于 $-c$）。由于 $f_1 - f_2 \in L_1(\bar{G})$，则知对任意的 $\varepsilon > 0$，存在着 $\delta(\varepsilon) > 0$，然后找到有限个长方形组成的集合 $R(\bar{R} \subset G_0)$，使得 $E \subset R$，而当 $m(R - E) < \delta(\varepsilon)$ 时，就有 $\iint_{R-E} |f_1 - f_2| d\sigma_z < \varepsilon$。再

构造一个函数 $\varphi(z)\in D_1^0(G_0)$：

$$\begin{cases}\varphi(z)=1, & \text{当 } z\in E,\\ 0\leqslant\varphi(z)\leqslant 1, & \text{当 } z\in(R-E),\\ \varphi(z)=0, & \text{当 } z\in(G_0-R),\end{cases}$$

于是有

$$\iint_{G_0}(f_1-f_2)\varphi d\sigma_z=\iint_E(f_1-f_2)\varphi d\sigma_z+\iint_{R-E}(f_1-f_2)\varphi d\sigma_z$$

$$\geqslant cmE-\iint_{R-E}|f_1-f_2|d\sigma_z\geqslant cmE-\varepsilon.$$

若选取 $\varepsilon=\frac{1}{2}cmE$，则有 $\iint_{G_0}(f_1-f_2)\varphi d\sigma_z>0$. 此矛盾说明 $f_1-f_2=0$ 在 G_0 内几乎处处成立，由 G_0 的任意性便知 $f_1=f_2$ p. p. 于 G.

定理 2.6 若 $g_{\bar z}=f\in L_1(\bar G_1)$，则

$$g(z)=\Phi(z)-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta=\Phi(z)+T_Gf, \tag{2.20}$$

其中 $\Phi(z)$是 G 内的解析函数. 反之，若 $\Phi(z)\in\mathfrak{A}_0(G)$，则函数 $g=\Phi+T_Gf\in D_{\bar z}(G)$，并且有

$$\frac{\partial g}{\partial\bar z}=f.$$

证 因为

$$(g-Tf)_{\bar z}=g_{\bar z}-(Tf)_{\bar z}=f-f=0,$$

所以根据定理 2.4 可知$[g-Tf]\in\mathfrak{A}_0(G)$，即 $\Phi(z)=g-Tf$ 在 G 内解析，从而(2.20)式成立. 定理的第二部分是显然的.

根据定理 2.6，若 $f\in L_1(\bar G)$，那么公式(2.20)不仅给出了复方程 (2.7) 的解 $w(z)\in L_1(\bar G)$ 的积分表示式，而且也给出了

$D_z(\bar{G})$类中函数的一般表达式。设 $D_z(\bar{G})$ 是满足 $g_z\in L_1(\bar{G})$ 的函数$g(z)$的集合。显然，

$$D_{\bar{z}}(\bar{G})\subset D_{\bar{z}}(G).$$

若用$\mathrm{T}L_p(\bar{G})$表示形如 $\mathrm{T}f$ 的函数集合，其中$f\in L_p(G)$，$p\geqslant 1$，那么根据公式(2.20)可得

$$D_{\bar{z}}(\bar{G})=\mathfrak{A}_0(G)+\mathrm{T}L_1(\bar{G}).$$

这也就是说，集合 $D_{\bar{z}}(\bar{G})$中的每一个元素，都可以唯一地表示成$\Phi+g$ 的形式，其中 $\Phi\in\mathfrak{A}_0(G)$，$g\in TL_1(\bar{G})$。

定理 2.7(局部性)　若任意的$G_1\subset G$，并且$g\in D_{\bar{z}}(\bar{G})$，则$g\in D_{\bar{z}}(G_1)$。

证　根据定理 2.6，有

$$g(z)=\Phi(z)-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\partial g}{\partial\bar{\zeta}}\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z}$$

$$=\Phi_1(z)-\frac{1}{\pi}\iint_{G_1}\frac{\partial g}{\partial\bar{\zeta}}\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z},$$

其中

$$\Phi_1(z)=\Phi(z)-\frac{1}{\pi}\iint_{G-G_1}\frac{\partial g}{\partial\bar{\zeta}}\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z}.$$

但由定理 2.1 知道$-\frac{1}{\pi}\iint_{G-G_1}\frac{\partial g}{\partial\bar{\zeta}}\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z}$在 G_1 内解析，所以$\Phi_1(z)\in\mathfrak{A}_0(G)$。再根据定理 2.6 可知 $g\in D_{\bar{z}}(G_1)$。

这个定理表明函数 $g(z)$对 $\bar{z}$（或 z）的广义可微性是局部的性质。

定义 2.2　设 G_0 为点 $z_0\in G$ 的一个邻域，并且在 G_0 内有

$$g(z)=\Phi_0(z)+\mathrm{T}_{G_0}f,\ \Phi_0\in\mathfrak{A}_0(G_0),\ f\in L_1(\bar{G}_0),$$

则称 $g(z)$在点 z_0 有对 $\bar{z}$ 的广义微商。

定理 2.8 若 $g(z)$ 在 G 内每一点都有对 $\bar{z}$ 的广义微商，则 g 在整个区域 G 内有对 $\bar{z}$ 的广义微商，即 $g_{\bar{z}}=f\in L_1(\bar{G})$。

证 设 G_0 与 G_1 分别为 G 内的点 z_0 与 z_1 的邻域，并且 $G_0\cap G_1=G_0G_1\neq\phi$。由定理 2.6 有

$$g_{\bar{z}}=\begin{cases}f_0\in L_1(\bar{G}_0), & z\in G_0,\\ f_1\in L_1(\bar{G}_1), & z\in G_1.\end{cases}$$

而在 G_0G_1 上

$$g=\Phi_0+\mathrm{T}_{G_0}f_0=\Phi_1+\mathrm{T}_{G_1}f_1.$$

根据广义微商的唯一性，可推得 $f_0=f_1\quad p.p.$ 于 G_0G_1。

对于任意有界闭域 $G'\subset G$，可以用有限个邻域 G_0，G_1，…，G_n 所复盖。在每个 G_i 上

$$g=\Phi_i+T_{G_i}f_i,\ \Phi_i\in\mathfrak{A}_0(G_i),\ (\mathrm{T}_{G_i}f_i)_{\bar{z}}=f_i\in L_1(\bar{G}_i),$$
$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,n,$$

并且在 $G_iG_j\neq\phi$ 上，$f_i\overset{p.p.}{=\!=\!=}f_j$。这样，如上述那样，当 $z\in G_i$ 定义 $g_{\bar{z}}=f=f_i$，显然 $g_{\bar{z}}=f\in L_1(\bar{G}')$。记 $\Phi(z)=g(z)-T_{G'}f$，那么，若 $z\in G_i$，则

$$\Phi_{\bar{z}}=(g-T_{G'}f)_{\bar{z}}=(g-T_{G_i}f-T_{G'-G_i})_{\bar{z}}=f_i-f_i=0.$$

所以 $\Phi\in\mathfrak{A}_1(G')$，即 $g=\Phi+T_{G'}f$. 不难看出 g 不依赖于子域 G' 的选取，从而 $g\in D_{\bar{z}}(G)$ 且 $g_{\bar{z}}\in L_1(\bar{G})$。

在本节最后，我们讨论一下关于交换广义微商的次序问题。

定理 2.9 若 $f_z\in D_{\bar{z}}(G)$，即 $f_{z\bar{z}}$ 存在，则 $f_{\bar{z}z}$ 也存在，并且 $f_{z\bar{z}}=f_{\bar{z}z}$。

证 设 G_0 为 G 内任意子域且 $\bar{G}_0\subset G$。由定理 2.6 有

$$f_z=\Phi_0(z)+\mathrm{T}_{G_0}f_{z\bar{z}}=\Phi_0(z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_0}\frac{f_{\zeta\bar{\zeta}}}{\zeta-z}d\sigma_\zeta,\ \Phi_0\in\mathfrak{A}(G_0),$$

$$(2.21)\quad f=\Phi_1(z)+T_{G_0}f_{\bar z}=\Phi_1(z)-\frac{1}{\pi}\iint_{G_0}\frac{f_p}{\bar p-\bar z}d\sigma_p$$

$$=\Phi_1(z)-\frac{1}{\pi}\iint_{G_0}\frac{\Phi_0(p)}{\bar p-\bar z}d\sigma_p+\frac{1}{\pi^2}\iint_{G_0}\left[\iint_{G_0}\frac{f_{\zeta\bar\zeta}}{\zeta-p}d\sigma_\zeta\right]\frac{d\sigma_p}{\bar p-\bar z}$$

$$=\Phi_1(z)+\Phi_2(z)+\frac{1}{\pi^2}\iint_{G_0}f_{\zeta\bar\zeta}d\sigma_\zeta\iint_{G_0}\frac{d\sigma_p}{(\zeta-p)(\bar p-\bar z)},$$

其中 $\Phi_1(z)$，$\Phi_2(z)\in\mathfrak{A}(G_0)$。又由公式（2.9），（2.10），有

$$\log|\zeta-z|^2=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{2\log|\zeta-p|}{p-z}dp+\frac{1}{\pi}\iint_{G_0}\frac{d\sigma_p}{(p-z)(\bar\zeta-\bar p)},$$

$$\log|\zeta-z|^2=\frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{2\log|\zeta-p|}{\bar p-\bar z}d\bar p+\frac{1}{\pi}\iint_{G_0}\frac{d\sigma_p}{(\bar p-\bar z)(\zeta-p)},$$

将此二式相减，并记 $\Phi(\zeta,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{2\log|\zeta-p|}{p-z}dp$，得

$$(2.22)\qquad \frac{1}{\pi}\iint_{G_0}\frac{d\sigma_p}{(\bar p-\bar z)(\zeta-p)}$$

$$=\Phi(\zeta,z)+\overline{\Phi(\zeta,z)}+\frac{1}{\pi}\iint_{G_0}\frac{d\sigma_p}{(p-z)(\bar\zeta-\bar p)}.$$

把(2.22)式代入(2.21)式，得到

$$f=\Phi_1(z)+\Phi_2(z)+\Phi_3(z)+\Phi_4(z)+\frac{1}{\pi^2}\iint_{G_0}f_{\zeta\bar\zeta}\,d\sigma_\zeta\iint_{G_0}\frac{d\sigma_p}{(p-z)(\bar\zeta-\bar p)}$$

其中

$$\Phi_3(z)=\frac{1}{\pi}\iint_{G_0} f_{\zeta\bar\zeta}\Phi(\zeta,z)d\sigma_\zeta,$$

$$\Phi_4(\bar z)=\frac{1}{\pi}\iint_{G_0} f_{\zeta\bar\zeta}\Phi(\zeta,\bar z)d\sigma_\zeta.$$

利用 Fubini 定理，可知

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_{G_0} f_{\zeta\bar\zeta}\, d\sigma_\zeta \iint_{G_0}\frac{d\sigma_p}{(p-z)(\bar\zeta-\bar p)}$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\iint_{G_0}\left[\iint_{G_0}\frac{f_{\zeta\bar\zeta}}{\bar\zeta-\bar p}d\sigma_\zeta\right]\frac{d\sigma_p}{p-z}=T_{G_0}\bar T_{G_0}f_{z\bar z},$$

于是

$$f=\Phi_1(\bar z)+\Phi_2(\bar z)+\Phi_3(z)+\Phi_4(\bar z)+T_{G_0}\bar T_{G_0}f_{z\bar z}. \tag{2.23}$$

由于 $\Phi(\zeta,z)$ 关于 z 是解析的，故对 G_0 内任一条简单可求长闭曲线 Γ_0，有

$$\int_{\Gamma_0}\Phi_3(z)dz=\frac{1}{\pi}\iint_{G_0} f_{\zeta\bar\zeta}\int_{\Gamma_0}\Phi(\zeta,z)dzd\sigma_\zeta=0.$$

因此，由 Morera 定理可知 $\Phi_3(z)$在 G_0 内解析。同理可证 $\Phi_4(\bar z)$ 在 G_0 内关于 $\bar z$ 解析。记

$$u(z)=\Phi(\bar z)+\Phi_2(\bar z)+\Phi_3(z)+\Phi_4(\bar z),$$

则 $u_{\bar z z}=0$。这样，由(2.23)得出

$$(f-T_{G_0}\bar T_{G_0}f_{z\bar z})_{\bar z z}=0,$$

即 $f_{\bar z z}=f_{z\bar z}$。这就是所要证明的。

这个定理表明，对 z 和 $\bar z$ 的混合广义微商与微分次序是无关的。

§3 积分 Tf 及其性质

本节讨论对于各种不同函数类的积分 Tf 的性质。

一、积分 $T_G f$ 的全连续性

引理 3.1 设 G 为有界域，而 z_1，z_2 为平面 E 上任意二点。$z_1 \neq z_2$，并且

$$I(\alpha,\beta)=\iint_G |\zeta-z_1|^{-\alpha}|\zeta-z_2|^{-\beta}d\sigma_\zeta,\ 0<\alpha<2,\ 0<\beta<2,$$

则

$$(3.1)\quad I(\alpha,\beta)\leqslant\begin{cases}M'(\alpha,\beta)|z_1-z_2|^{2-\alpha-\beta}, & \text{当 } \alpha+\beta>2.\\ M''(\alpha,\beta,G)+8\pi|\log|z_1-z_2||, & \text{当 } \alpha+\beta=2,\\ M'''(\alpha,\beta,G), & \text{当 } \alpha+\beta<2.\end{cases}$$

这里 $M'(\alpha,\beta)$ 表示常数 M' 仅依赖于 α，β，其他与此类似。

证 首先以 z_1 为心，$\rho=2|z_1-z_2|$ 为半径画圆 G_1，再以 $2\rho_0$ 为半径画同心圆 G_0，使得 $\bar{G}\subset G_0$。当 $\zeta\bar{\in}G_1$ 时，则

$$2|\zeta-z_2|\geqslant|z_1-z_2|+|\zeta-z_2|>|\zeta-z_1|=r,$$

$$I_0=\iint_{G_0-G_1}|\zeta-z_1|^{-\alpha}|\zeta-z_2|^{-\beta}d\sigma_\zeta\leqslant\iint_{G_0-G_1}2^\beta|\zeta-z_1|^{-(\alpha+\beta)}d\sigma_\zeta$$

$$\leqslant\pi 2^{1+\beta}\int_\rho^{2\rho_0}r^{1-\alpha-\beta}dr,$$

于是，当 $\alpha+\beta<2$ 时

$$I_0\leqslant\pi 2^{1+\beta}\frac{(2\rho_0)^{2-\alpha-\beta}}{2-\alpha-\beta}\leqslant\frac{32\pi}{2-\alpha-\beta}\rho_0^{2-\alpha-\beta},$$

当 $\alpha+\beta=2$ 时

$$I_0\leqslant 8\pi\log\frac{2\rho_0}{\rho}\leqslant 8\pi\log\frac{\rho_0}{|z_1-z_2|}\leqslant 8\pi\log\rho_0+8\pi|\log|z_1-z_2||;$$

当 $\alpha+\beta>2$ 时

$$I_0\leqslant\frac{2^{1+\beta}\pi}{\alpha+\beta-2}(2|z_1-z_2|)^{2-\alpha-\beta}\leqslant\frac{8\pi}{\alpha+\beta-2}|z_1-z_2|^{2-\alpha-\beta}.$$

下面再估计

$$I_1=\iint\limits_{G_1}|\zeta-z_1|^{-\alpha}|\zeta-z_2|^{-\beta}d\sigma_\zeta.$$

设 $\zeta-z_1=t|z_1-z_2|$，则 $\zeta-z_2=\zeta-z_1-(z_2-z_1)=t|z_1-z_2|-(z_2-z_1)=|z_1-z_2|(t-e^{i\theta})$，于是

$$I_1=\iint\limits_{|t|<2}\frac{|z_1-z_2|^2d\sigma_t}{|z_1-z_2|^{\alpha+\beta}|t|^\alpha|t-e^{i\theta}|^\beta}$$

$$=\frac{1}{|z_1-z_2|^{\alpha+\beta-2}}\iint\limits_{|t|<2}\frac{d\sigma_t}{|t|^\alpha|t-e^{i\theta}|^\beta},$$

对于 $\alpha<2$，$\beta<2$，上式右边的广义积分是收敛的，故

$$I_1\leqslant M(\alpha,\beta)|z_1-z_2|^{2-\alpha-\beta}.$$

联合上述结果，可得(3.1)式，其中

$$M'(\alpha,\beta)=M(\alpha,\beta)+\frac{8\pi}{2-\alpha-\beta},$$

$$M''(\alpha,\beta,G)=M(\alpha,\beta)+8\pi\log\rho_0,$$

$$M'''(\alpha,\beta,G)=M(\alpha,\beta)|z_1-z_2|^{2-\alpha-\beta}+\frac{32\pi}{2-\alpha-\beta}\rho_0^{2-\alpha-\beta}.$$

定理 3.1 设 G 为有界域，若 $f\in L_p(\bar{G})$，$p>2$，则函数 $g=T_Gf$ 满足不等式

(3.2) $\quad |g(z)|\leqslant M_1(p,G)L_p(f,\bar{G})$，$z\in E$；

$$(3.3)\qquad |g(z_1)-g(z_2)|\leqslant M_2(p)L_p(f,\overline{G})|z_1-z_2|^{\alpha},$$

$$\alpha=\frac{p-2}{p},\quad z_1,z_2\in E.$$

证 首先证(3.2)。利用 Hölder 不等式可得

$$(3.4)\qquad |g(z)|\leqslant\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|}d\sigma_\zeta$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\left(\iint_G|f(\zeta)|^p d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{p}}\left(\iint_G|\zeta-z|^{-q}d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

由于 $q=\dfrac{p}{p-1}<2$，于是，当 $z\in\overline{G}$ 时

$$(3.5)\qquad \frac{1}{\pi}\left(\iint_G|\zeta-z|^{-q}d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^d r^{1-p}\,dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{2-q}\right)^{\frac{1}{q}}d^{\alpha},\quad \alpha=\frac{p-2}{p},$$

而当 $z\overline{\in}\overline{G}$ 时

$$(3.6)\qquad \frac{1}{\pi}\left(\iint_G|\zeta-z|^{-q}d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}d\theta\int_\rho^{\rho+d}r^{1-p}\,dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{2-q}\left[(\rho+d)^{2-q}-\rho^{2-q}\right]\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{2-q}d^{2-q}\left[\left(1+\frac{\rho}{d}\right)^{2-q}-\left(\frac{\rho}{d}\right)^{2-q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{2-q}\right)^{\frac{1}{q}}d^{\alpha}.$$

其中 d 为区域 G 的直径，ρ 为 z 到 G 的距离，$\alpha=\frac{p-2}{p}$，联合(3.4)、(3.5)与(3.6)便可推出不等式(3.2)。

关于不等式(3.3)的证明，可根据 Hölder 不等式并利用引理 3.1

$$
\begin{aligned}
&|g(z_1)-g(z_2)| \\
&\leqslant \frac{|z_1-z_2|}{\pi}\iint_G \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_1||\zeta-z_2|}d\sigma_\zeta \\
&\leqslant \frac{|z_1-z_2|}{\pi}\left(\iint_G |f(\zeta)|^p d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{p}}\left(\iint_G (|\zeta-z_1||\zeta-z_2|^{-q}d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \frac{|z_1-z_2|}{\pi}L_p(f,\bar{G})(M^*(q,q)|z_1-z_2|^{2-2q})^{\frac{1}{q}} \\
&=M_2(p)L_p(f,\bar{G})|z_1-z_2|^\alpha,\quad z_1,z_2\in E.
\end{aligned}
$$

这个不等式表明了积分 Tf 在全平面 E 上的 Hölder 连续性。

不等式(3.2)与(3.3)表明 $T_G f$ 是空间 $L_p(\bar{G})$ 上的全连续算子，并且把这个空间映射到空间 $C_\alpha(\bar{G})\left(\alpha=\frac{p-2}{p},\ p>2\right)$。由(3.2)和(3.3)可得

$$
\begin{aligned}
(3.7)\quad C_\alpha(Tf,\bar{G})&=C(Tf,\bar{G})+H(Tf,\alpha,\bar{G}) \\
&\leqslant[M_1(p,G)+M_2(p)]L_p(f,\bar{G}), \\
&\alpha=\frac{p-2}{p},\ p>2.
\end{aligned}
$$

推论 3.1 设 G 为有界域且 $f\in C(\bar{G})$，则

$$(3.8)\quad |g(z)|=|T_G f|\leqslant MC(f,\bar{G}),\quad z\in\bar{G},$$

$$(3.9)\quad |g(z_1)-g(z_2)|\leqslant MC(f,\bar{G})|z_1-z_2|\log\frac{2d}{|z_1-z_2|},$$

$$z_1,\ z_2\in\bar{G},$$

其中 d 为区域 G 的直径。

证 由于

$$|T_G f| \leqslant \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|}\,d\sigma_\zeta \leqslant \frac{C(f, \bar{G})}{\pi}\iint_G \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|} \leqslant MC(f, \bar{G}),$$

故(3.8)式成立。又根据引理3.1，有

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leqslant \frac{|z_1 - z_2|}{\pi}\iint_G \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_1||\zeta - z_2|}\,d\sigma_\zeta$$

$$\leqslant \frac{C(f, \bar{G})}{\pi}|z_1 - z_2| \iint_G |\zeta - z_1|^{-1}|\zeta - z_2|^{-1}\,d\sigma_\zeta$$

$$\leqslant \frac{C(f, \bar{G})}{\pi}|z_1 - z_2|\left[M_3 + 8\pi\log\frac{\rho_0}{|z_1 - z_2|}\right]$$

$$\leqslant M_4 C(f, \bar{G})\,|z_1 - z_2|\log\frac{2d}{|z_1 - z_2|}$$

（当 $|z_1 - z_2|$ 充分小），

其中取 $\rho_0 = 2d$。这个不等式表明了函数 $g(z)$ 集合的同等连续性，因而根据(3.8)(3.9)可知 $T_G f$ 在空间 $C(\bar{G})$ 内是全连续的。

推论 3.2 设 d 为有界域 G 的直径，$f \in L_\infty(\bar{G})$，则

(3.10) $\quad |g(z)| = |T_G f| \leqslant ML_\infty(f, \bar{G}),\ z \in \bar{G},$

(3.11) $\quad |g(z_1) - g(z_2)| \leqslant ML_\infty(f, \bar{G})\,|z_1 - z_2|\log\dfrac{2d}{|z_1 - z_2|},$

$z_1,\ z_2 \in \bar{G},$

其中 $L_\infty(f,\ \bar{G}) = \lim\limits_{p\to\infty} L_p(f,\ \bar{G}) = \sup\limits_{z\in\bar{G}-G_0}|f(z)|$，$\mathrm{mes}G_0 = 0$。这两个不等式可由(3.2)与(3.3)直接推出，这表明算子 $T_G f$ 在空间 $L_\infty(\bar{G})$ 内也是全连续的。

推论 3.3 设 G 为有界域且 $f \in D_{1,p}(G)$（或 $W_p^1(G)$），$p>2$，则 $f \in C_\alpha(G)$，$\alpha = \dfrac{p-2}{p}$。

证 因为 $f\in D_{1,p}(G)$，所以 $f_{\bar{z}}\in L_p(\bar{G})$，根据定理 2.6，有

$$f(z)=\Phi(z)+T(f_{\bar{z}}),$$

其中 $\Phi(z)$ 在 $\bar{G}_0\subset G$ 解析。又由定理 3.1 知道 $T(f_{\bar{z}})\in C_\alpha(E)$，于是 $f(z)\in C_\alpha(\bar{G}_0)$，从而 $f\in C_\alpha(G)$。

根据定理 3.1 还可以推出更一般的结果：

推论 3.4 若 $f\in D_{m,p}(G)$，$p>2$，$m\geqslant 1$，则 $Tf\in C_\alpha^{m-1}$，$\alpha=\dfrac{p-2}{p}$。

实际上，我们只要把 f 的 $m-1$ 阶微商，按公式 (2.20) 用 m 阶微商表示出来，然后再应用定理 3.1 即可证明该推论。

二、Pompeiu 公式的推广

当 $w\in C(\bar{G})\cap C^1(G)$ 时，我们曾给出公式 (2.9) 和 (2.10)，现在把它们加以推广。

定理 3.2 设有界域 G 的边界 Γ 是由有限条可求长的简单闭曲线组成，并且 $w(z)\in C(\bar{G})$，$w_{\bar{z}}\in L_p(\bar{G})$，$p>2$，则

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{w_{\bar{\zeta}}}{\zeta-z}d\sigma_\zeta. \tag{3.12}$$

证 由于 $w_{\bar{z}}\in L_p(\bar{G})\subset L_1(\bar{G})$，所以根据定理 2.6 有

$$w(z)=\Phi(z)+g(z), \tag{3.13}$$

其中 $\Phi(z)\in\mathfrak{A}(G)$，$g(z)=T(w_{\bar{z}})$。又由定理 3.1 得出 $T(w_{\bar{z}})\in C_\alpha(E)$，$\alpha=\dfrac{p-2}{p}$，它在 $\bar{G}$ 外解析，在无穷远点变为 0。根据定理已给条件 $w(z)\in C(\bar{G})$，可知 $\Phi(z)=w(z)-g(z)$ 在 $\bar{G}$ 上连续。于是利用 Cauchy 公式与 Cauchy 定理，就有

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{w(\zeta)-g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{w(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{w(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

把 $\Phi(z)$代入(3.13)则得(3.12)。

三、积分 $T_E f$ 在全平面 E 上的 Hölder 连续性

我们必须指出，当 G 为无界域时，不等式(3.2)就失去意义，因为常数 $M_1(p, G)$与区域的大小有关，而不等式(3.3)依然成立。因此，若 $f \in L_p(E)$，$p>2$，并且在某一固定点 $z=z_0$，Tf 存在，则 $Tf \in H_\alpha(E)$，$\alpha = \frac{p-2}{p}$，并且在无穷远点附近有：$T_G f = 0(|z|^\alpha)$。

下面我们讨论对于无界域情形的定理：

定理 3.3 设 $f \in L_{p,2}(E)$，$p>2$，则函数 $g(z) = T_E f$ 满足条件

(3.14) $\qquad |g(z)| \leqslant M(p) L_{p,2}(f),$

(3.15) $\qquad |g(z_1) - g(z_2)| \leqslant M(p) L_{p,2}(f) |z_1 - z_2|^\alpha,$

$$\alpha = \frac{p-2}{p}, \quad z_1, \quad z_2 \in E.$$

此外，对于任意给定的 $R>1$，可以找到数 $M(p, R)$，使得

(3.16) $\quad |g(z)| \leqslant M(p, R) L_{p,2}(f) |z|^{-\alpha}$， 当 $|z| \geqslant R$，$\alpha = \frac{p-2}{p}$，

其中 $L_{p,2}(f) = L_p(f, E_1) + L_p\left(z^{-2} f\left(\frac{1}{z}\right), E_1\right)$，$E_1 = \{z \,||z| \leqslant 1\}$。

证 令 $E_2 = \{z \,||z| \geqslant 1\}$，那么 $g(z) = T_E f = T_{E_1} f + T_{E_2} f$。在 $T_{E_2} f$ 中引入代换 $t = \frac{1}{\zeta}$，就有

$$g(z)=T_{E_1}f-\frac{1}{\pi}\iint_{E_2}\frac{f(\zeta)d\sigma_\zeta}{\zeta-z}$$

$$=T_{E_1}f-\frac{1}{\pi}\iint_{E_1}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\bar{t}^2t(1-tz)}d\sigma_t=g_1(z)+g_2(z).$$

注意到

$$\frac{1}{\bar{t}^2t(1-tz)}=\frac{1}{\bar{t}^2}\left[\frac{1}{t}+\frac{z}{1-tz}\right],$$

于是

$$g_2(z)=g_0(o)-g_0\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$g_0(z)\equiv-\frac{1}{\pi}\iint_{E_1}\frac{f_0(t)d\sigma_\xi}{t-z},\qquad f_0(t)\equiv\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\bar{t}^2}.$$

由于 f 与 $f_0\in L_p(E_1)$，$p>2$，根据定理 3·1，函数 g_0 与 g_1 满足形如（3·2）的不等式，所以

$$|g(z)|\leqslant g_1(z)|+|g_0(o)|+\left|g_0\left(\frac{1}{z}\right)\right|$$

$$\leqslant M(p)[L_p(f,E_1)+L_p(f_0,E_1)]\equiv M(p)L_{p,2}(f).$$

这就证明了（3·14）式。下面证明（3.15）式。

首先，根据定理 3·1，知函数 $g_1(z)$ 满足（3.3）式。其次对函数 $g_2(z)$，有

$$(3\cdot17)\qquad |g_2(z_1)-g_2(z_2)|$$

$$=\left|g_0\left(\frac{1}{z_1}\right)-g_0\left(\frac{1}{z_2}\right)\right|\leqslant\frac{|z_1-z_2|}{\pi}\iint_{E_1}\frac{|f_0(t)|d\sigma_t}{|1-tz_1||1-tz_2|}.$$

对上式右边的估计，可分以下三种情形来考虑：

(1) 若 $|z_i|\leqslant\frac{1}{2}$，$i=1.2$，则当 $|t|\leqslant 1$ 时就有 $|1-tz_i|\geqslant\frac{1}{2}$，$i=1.2$，注意到 $|z_1-z_2|<1$，那么由 (3.17) 就有

$$(3.18)\quad |g_2(z_1)-g_2(z_2)|\leqslant M(p)L_p(f_0,E_1)|z_1-z_2|$$

$$\leqslant M(p)L_{p,2}(f)|z_1-z_2|^a,\quad a=\frac{p-2}{p}.$$

(2) 若 $|z_1|<\frac{1}{2}$，$|z_2|\geqslant\frac{1}{2}$，则 $\left|\frac{z_1}{z_2}-1\right|^{\frac{2}{p}}\leqslant 2^{\frac{2}{p}}$。于是利用 Höder 不等式可得

$$|g_2(z_1)-g_2(z_2)|\leqslant\frac{|z_1-z_2|}{\pi}\iint_{E_1}\frac{|f_0(t)|}{|1-tz_1||1-tz_2|}d\sigma_t$$

$$\leqslant\frac{2|z_1-z_2|}{\pi|z_2|}L_p(f_0,E_1)\left(\iint_{E_1}\left(t-\frac{1}{z_2}\right)^{-q}d\sigma_t\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$1<q<2.$$

注意到积分

$$\iint_{E_1}\left(t-\frac{1}{z_2}\right)^{-q}d\sigma_t$$

是收敛的，并且

$$\frac{|z_1-z_2|}{|z_2|}=\frac{|z_1-z_2|^{\frac{p-2}{p}}|z_1-z_2|^{\frac{2}{p}}}{|z_2|}$$

$$\leqslant 2^{1-\frac{2}{p}}\left|\frac{z_1}{z_2}-1\right|^{\frac{2}{p}}\left|z_1-z_2\right|^{\frac{p-2}{p}}\leqslant 2\left|z_1-z_2\right|^{\frac{p-2}{p}},$$

从而有

$$(3\cdot 19)\quad |g_2(z_1)-g_2(z_2)|\leqslant M(p)L_{p,2}(f)|z_1-z_2|^a,\quad a=\frac{p-2}{p}.$$

(3) 若 $|z_i|\geqslant\frac{1}{2}$，$i=1,\ 2$，则由（3·3）式得

$$(3.20)\qquad |g_2(z_1)-g_2(z_2)|\leqslant\left|g_0\left(\frac{1}{z_1}\right)-g_0\left(\frac{1}{z_2}\right)\right|$$

$$\leqslant M_6(p)L_p(f_0,\ E_1)\left|\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right|^{\alpha}$$

$$\leqslant M(p)L_{p,2}(f)|z_1-z_2|^{\alpha},\quad \alpha=\frac{p-2}{p}.$$

这样一来，联合（3·18），（3·19）和（3·20）式便推得

$$|g(z_1)-g(z_2)|\leqslant|g_1(z_1)-g_1(z_2)|+|g_2(z_1)-g_2(z_2)|$$

$$\leqslant M(p)L_{p,2}(f)|z_1-z_2|^{\alpha},\quad \alpha=\frac{p-2}{p}.$$

最后，我们证明（3.16）式。当 $|z|>1$ 时，有

$$(3.21)\qquad |g(z)|\leqslant|g_1(z)|+\left|g_0(o)-g_0\left(\frac{1}{z}\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\iint_{E_1}\frac{|f(t)|}{|z|-|t|}d\sigma_t+\lim_{z_1\to\infty}\left|g_0\left(\frac{1}{z_1}\right)-g_0\left(\frac{1}{z}\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\iint_{E_1}\frac{|f(t)|}{|z|-|t|}d\sigma_t+\lim_{z_1\to\infty}\frac{1}{\pi}\left|-\iint_{E_1}\frac{f_0(t)}{t-\frac{1}{z_1}}d\sigma_t\right.$$

$$\left.+\iint_{E_1}\frac{f_0(t)}{t-\frac{1}{z}}d\sigma_t\right|.$$

根据引理 3·1 推得

$$(3\cdot22)\qquad \frac{1}{\pi}\left|-\iint_{E_1}\frac{f_0(t)}{t-\frac{1}{z_1}}d\sigma_t+\iint_{E_1}\frac{f_0(t)}{t-\frac{1}{z}}d\sigma_t\right|$$

$$\leqslant \frac{|z_1 - z|}{\pi |zz_1|} L_p(f_0, E_1) \left(\iint_{E_1} \frac{d\sigma_t}{\left| t - \frac{1}{z_1} \right|^q \left| t - \frac{1}{z} \right|^q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant M'(p) L_p(f_0, E_1) \frac{|z_1 - z|}{|zz_1|} \left| \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z} \right|^{\frac{2-2q}{q}},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

于是，有

$$|g(z)| \leqslant |g_1(z)| + \lim_{z_1 \to \infty} \left| g_0\left(\frac{1}{z_1}\right) - g_0\left(\frac{1}{z}\right) \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi(|z| - 1)} L_p(f, E_1) + M'(p) L_p(f_0, E_1) \left| \frac{1}{z} \right|^{\frac{2-2q}{q}} |z|^{-1}$$

$$\leqslant M(p) L_{p,2}(f) \left[\frac{1}{|z| - 1} + |z|^{\frac{2-p}{p}} \right].$$

由此易得不等式（3·16）。这就证明了定理 3·3。

根据定理 3·3 可知，若 $f \in L_{p,2}(E)$，则 $T_E f \in C_\alpha(E)$，$\alpha = \frac{p-2}{p}$，$p > 2$。这表明积分 $T_E f$ 在全平面上是 Höder 连续的，并且在无穷远附近 $T_E f$ 是与 $|z|^{-\alpha}$ 同阶无穷小，即

$$T_E f = o(|z|^{-\alpha}), \quad \alpha = \frac{p-2}{p}, \quad p > 2.$$

四、积分 $T_G f$ 属于 $L_\gamma(\Gamma)$ 的性质

定理 3·4 设区域 G 的边界 Γ 是由有限条逐段光滑曲线组成，若 $f \in L_p(\bar{G})$，$1 < p \leqslant 2$，则 $T_G f \in L_\gamma(\Gamma)$，其中 γ 是适合

$$1 < \gamma < \frac{p}{2-p}, \quad 1 < p \leqslant 2 \tag{3·23}$$

的任意数，并且有如下不等式成立：

$$(3.24)\qquad L_\gamma(T_G f,\Gamma)=\left(\int_\Gamma |T_G f|^\gamma ds\right)^{\frac{1}{\gamma}}\leqslant M(p,\gamma,G)L_p(f,\bar{G}).$$

证 我们先假定 $p<\gamma<\frac{p}{2-p}$，于是有

$$|T_G f|\leqslant\frac{1}{\pi}\left(\iint_G \left|f(\zeta)\right|^{\frac{p}{\gamma}}\left|\zeta-z\right|^{-\frac{1}{\gamma}+\alpha}\left|f(\zeta)\right|^{p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}\right)}\right|\zeta$$

$$-z\Big|^{-\frac{2}{q}+\alpha}d\sigma_\zeta.$$

其中 $2\alpha=\frac{1}{\gamma}-\frac{2}{p}+1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$．由于$\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma-p}{\gamma p}+\frac{1}{q}=1$，从而利用Hölder不等式可得

$$|T_G f|\leqslant\frac{1}{\pi}\left(\iint_G\left|f(\zeta)\right|^p\left|\zeta-z\right|^{-1+\gamma\alpha}d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\iint_G\left|f(\zeta)\right|^p d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}}$$

$$\left(\iint_G\left|\zeta-z\right|^{\alpha q-2}d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{q}}.$$

由此

$$\int_\Gamma\left|T_G f\right|^\gamma ds\leqslant\pi^{-\gamma}\left[M(\alpha q,G)\right]^{\frac{\gamma}{q}}\left[L_p(f,\bar{G})\right]^{\gamma-p}$$

$$\int_\Gamma\left(\iint_G\left|f(\zeta)\right|^p\left|\zeta-z\right|^{-1+\gamma\alpha}d\sigma_\zeta\right)ds.$$

但当 $\delta<1$ 时，常数

$$M(\delta,\ \Gamma)=\sup_{z\in E}\int_\Gamma|\zeta-z|^{-\delta}ds<+\infty,$$

那末由于 $1-\alpha\gamma<1$ 可知

$$\int_{\Gamma}|T_G f|^{\gamma}ds \leqslant \pi^{-\gamma}[M(\alpha q, G)]^{\frac{\gamma}{q}} M(\alpha\gamma, \Gamma)[L_p(f, \bar{G})]^{\gamma},$$

即（3·24）式成立：

$$L_{\gamma}(T_G f, \Gamma) = \left(\int_{\Gamma}|T_G f|^{\gamma}ds\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leqslant M(p, \gamma, G)L_p(f, \bar{G}).$$

这表明 $T_G f \in L_{\gamma}(\Gamma)$，$p < \gamma < \frac{p}{2-p}$，$1 < p \leqslant 2$.

其次，要去掉限制 $p < \gamma < \frac{p}{2-p}$. 由于当 $1 < \lambda < \gamma < \frac{p}{2-p}$ 时，有

$$\left(\int_{\Gamma}|T_G f|^{\lambda}ds\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leqslant \left(\int_{\Gamma}ds\right)^{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\gamma}}\left(\int_{\Gamma}|T_G f|^{\gamma}ds\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

所以当 $1 < \lambda < \frac{p}{2-p}$（即（3·23）式成立）时，（3·24）式仍然成立。将 λ 改记为 γ，则 $T_G f \in L_{\gamma}(\Gamma)$.

需要指出，当 $p = 2$ 时，（3·23）中的 γ 可取大于1的任意正数。但这并不意味着当 $f \in L_2(\bar{G})$ 时就有 $T_G f \in L_{\infty}(\bar{G})$ 或 $T_G f \in L_{\infty}(\Gamma)$. 例如，若 G 是圆 $|z| \leqslant d < 1$. 则函数

$$f(z) = \left(\ln\ln\frac{1}{r}\right)_{\bar{z}} = \frac{e^{i\varphi}}{2r\ln r}, \quad z = re^{i\varphi}$$

属于 $L_2(\bar{G})$，但是 $T_G f = \ln\ln\frac{1}{r}$ 却是无界的.

五、$D_{1,p}$ 类函数的 Green 公式

我们先给出关于 $T_G f$ 的 Cauchy 公式，有如下定理：

定理 3·5 设区域 G 的边界 Γ 是由有限条逐段光滑曲线组成，并且 $f \in L_p(\bar{G})$，$p > 1$，则成立公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{T_G f}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} -T_G f, & \text{当 } z \bar{\in} G + \Gamma, \\ 0, & \text{当 } z \in G. \end{cases} \tag{3·25}$$

证 设G_n是一串有界区域序列，$\bar{G}_n \subset G_{n+1} \subset \bar{G}_{n+1} \subset G$，并且当$n\to\infty$时，$G_n\to G$。现在考虑函数

$$T_n f = -\frac{1}{\pi}\iint_{G_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\sigma_\zeta,$$

根据定理2·1可知$T_n f$在$\bar{G}_n$外解析，在∞点变为0，因而由Cauchy公式得

$$(3.26)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{T_n f}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} -T_n f, & \text{当 } z\bar{\in} G+\Gamma, \\ 0, & \text{当 } z\in G. \end{cases}$$

对于固定的z值，显然$\lim\limits_{n\to\infty} T_n f = T_G f$。此外，由定理3·4知

$$(3.27)\qquad L_\gamma(T_G f - T_n f, \Gamma)\to 0\ (\text{当 } n\to\infty),\ \gamma>1,$$

令

$$f_n = \begin{cases} f, & \text{当 } z\in G_n, \\ 0, & \text{当 } z\bar{\in} G_n, \end{cases}$$

则$T_G f - T_n f = T_G(f - f_n)$，于是

$$\left|\int_\Gamma \frac{T_G f}{\zeta - z}d\zeta - \int_\Gamma \frac{T_n f}{\zeta - z}d\zeta\right| = \left|\int_\Gamma \frac{T_G(f - f_n)}{\zeta - z}d\zeta\right|$$

$$\leqslant \left(\int_\Gamma |T_G(f-f_n)|^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\int_\Gamma |\zeta - z|^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}d\zeta\right)^{1-\frac{1}{\gamma}},\quad z\bar{\in}\Gamma.$$

由此，利用（3.27）可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{T_n f}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{T_G f}{\zeta - z}d\zeta,$$

这样，从（3.26）两边取极限，即得（3.25）式，这就是所要证明的。

利用（3.25），我们可以得到关于$T_G f$的Green公式。事实上，把（3.25）式两边乘以z，由于$\dfrac{z}{\zeta - z}\to -1$（当$z\to\infty$），

从而得到

$$(3.28)\qquad \frac{1}{2i}\int_{\Gamma} T_G f dz = \iint_G f(z)d\sigma_z = \iint_G (T_G f)_{\bar z} d\sigma_z.$$

类似地，有

$$(3.29)\qquad -\frac{1}{2i}\int_{\Gamma} \overline{T}_G f dz = \iint_G (-f(z)d\sigma_z = -\iint_G (\overline{T}_G f)_z d\sigma_z.$$

此二式就是关于 $T_G f$ 和 $\overline{T}_G f$ 的 Green 公式. 又若 $f\in L_p(\overline{G})$, $p>2$, 且 Γ 是由有限条可求长简单的 Jordan 曲线组成时, 公式 (3.28) 与 (3.29) 仍然成立, 因为此时根据定理 3.1 函数 $T_G f\in C_\alpha(E)$, $\alpha=\dfrac{p-2}{p}$, 故公式 (3·25) 可直接由 Cauchy 公式得出

下面给出关于 $D_{1,p}(G)$ 类函数的 Green 公式.

定理 3.6 设 $w_{\bar z}\in L_p(G_0)$, $p>1$, 且 $\overline{G}\subset G_0$, 则成立

$$(3.30)\qquad \frac{1}{2i}\int_{\Gamma} w(z)dz = \iint_G w_{\bar z} d\sigma_z.$$

证 设 G' 是 G_0 的一个子域, 并且满足条件 $\overline{G}\subset G'\subset\overline{G}'\subset G_0$. 于是由定理 2.6 在 G' 内

$$(3.31)\qquad w(z)=\Phi(z)-\frac{1}{\pi}\iint_{G'}\frac{w_{\bar\zeta}}{\zeta-z}d\sigma_\zeta$$

$$=\Phi(z)-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{w_{\bar\zeta}}{\zeta-z}d\sigma_\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{G'-G}\frac{w_{\bar\zeta}}{\zeta-z}d\sigma_\zeta,$$

$$z\in G',$$

其中 $\Phi(z)$ 是 G' 内的解析函数, 又根据 Cauchy 定理与 (3.28) 式, 有

$$\int_\Gamma \Phi(z)\,dz=0,\quad \frac{1}{2i}\int_\Gamma (T_G w_{\bar z})\,dz=\iint_G w_{\bar z}\,d\sigma_z$$

所以对 (3.31) 式两边取积分，则得

$$(3.32)\qquad \frac{1}{2i}\int_\Gamma w(z)\,dz$$

$$=\iint_G w_{\bar z}\,d\sigma_z+\frac{1}{2i}\int_\Gamma\left(-\frac{1}{\pi}\iint_{G'-G}\frac{w_{\bar\zeta}}{\zeta-z}\,d\sigma_\zeta\right)dz,\quad z\in\Gamma.$$

考虑 $G'-G_\varepsilon$，这里 G_ε 是与 G 距离不超过 $\varepsilon(>0)$ 的点集，根据定理 2.1 可知 $T_{G'-G_\varepsilon}w_{\bar z}$ 在$[\overline{G'-G_\varepsilon}]$外解析，从而

$$\int_\Gamma (T_{G'-G_\varepsilon}w_{\bar z})\,dz=0.$$

令 $\varepsilon\to 0$，则由 (3.32) 即得 (3.30) 式。

同样地，若 $w_z\in L_p(G_0)$，$p>1$，则有

$$(3.33)\qquad \frac{1}{2i}\int_\Gamma w(z)\,d\bar z=-\iint_G w_z\,d\sigma_z.$$

最后，我们指出，若 $w\in C(\bar G)$，$w_{\bar z}\in L_p(\bar G)$ 或 $w_z\in L_p(\bar G)$，$p>2$，那么当 Γ 是由有限条可求长 Jordan 曲线组成时，公式 (3.30) 与 (3.33) 仍然成立。

六、形如 T_Gf 的函数的可微性．算子 Πf

设区域 G 的边界 $\Gamma\in C_\alpha^m$，那么此时称 G 属于 C_α^m 类，即 $G\in C_\alpha^m$ $(0<\alpha<1)$。我们已经知道，若 $f\in L_1(\bar G)$，则 $(T_Gf)_{\bar z}=f$。于是提出：在什么条件下 T_Gf 有对 z 的广义微商？当 T_Gf 对 z 的广义微商存在时，我们记为

$$(T_Gf)_z=\Pi_G f\quad 或\quad (Tf)_z=\Pi f.$$

定理 3.7 设 $G\in C_\alpha^{m+1}$，$f(z)\in C_\alpha^m(\bar G)$，$0<\alpha<1$，$m\geqslant 0$，则函数 $g(z)=T_Gf\in C_\alpha^{m+1}(\bar G)$。$T_Gf$ 是空间 $C_\alpha^m(\bar G)$ 中的全连续算

子，并且把这空间映为 $C_\alpha^{m+1}(\bar{G})$.

$$\Pi f \equiv \Pi_G f = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta.$$

在 Cauchy 主值意义下存在，并且

(3·34) $\quad \dfrac{\partial Tf}{\partial x} = f + \Pi f,\ \dfrac{\partial Tf}{\partial y} = -if + i\Pi f,$

(3·35) $\quad (\Pi f)_{\bar z} = f_z,\quad (\Pi f)_z = \Pi f_z - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta,$

(3·36) $\quad C_\alpha^m(\Pi_G f) \leqslant C_\alpha^{m+1}(T_G f) \leqslant M(m,\alpha)C_\alpha^m(f,\bar{G}).$

证 分以下几步

1) 首先说明积分 Πf 在 Cauchy 主值意义下是存在的。为此，设 z 为区域 G 内的某一定点，则当 $f\in C_\alpha(\bar{G})$ 时，广义积分

$$-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta$$

是存在的。现在以 z 为心，ε 为半径作一小圆 $K_\varepsilon\subset G$，令 $G_\varepsilon = G\backslash K_\varepsilon$，那么

$$\begin{aligned}\Pi f &= -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta\\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta + \left(-\frac{1}{\pi}\right)\iint_G \frac{f(z)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta\\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta - f(z)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\iint_{G_\varepsilon}\frac{1}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta,\end{aligned}$$

利用公式 (3.33)，就有

$$\frac{1}{\pi}\iint_{G_\varepsilon}\frac{1}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta = -\frac{1}{\pi}\iint_{G_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)d\sigma_\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\bar{\zeta}}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_*}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\bar{\zeta}}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\bar{\zeta}d\zeta}{(\zeta-z)^2}$$

$$=\Phi'_{\Gamma}(z),$$

其中 $\Phi_{\Gamma}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\bar{\zeta}d\zeta}{\zeta-z}$. 特别，当 Γ 是圆周 $|\zeta-z_0|=R$，而 z 在这个圆内：$|z-z_0|<R$ 时，则有 $\Phi'_{\Gamma}(z)\equiv 0$.

于是在 Cauchy 主值意义下

$$\Pi f=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta-f(z)\Phi'_{\Gamma}(z). \tag{3.37}$$

2) 当 $m=0$ 时，$G\in C^1_\alpha$，$0<\alpha<1$. 我们来证明，若 $f\in C_\alpha(\bar{G})$，那么 $\Pi f\in C_\alpha(\bar{G})$，并且 Πf 把空间 $C_\alpha(\bar{G})$ 映为自身.

设 z_1，$z\in G$，$z_1\neq z$，则

$$\begin{aligned}(3.38)\qquad &\Pi f(z_1)-\Pi f(z)\\ &=\frac{z_1-z}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z_1)}d\sigma_\zeta\\ &+\frac{z_1-z}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)-f(z_1)}{(\zeta-z)(\zeta-z_1)^2}d\sigma_\zeta\\ &+\frac{f(z)(z_1-z)}{\pi}\iint_G\frac{d\sigma_\zeta}{(\zeta-z)^2(\zeta-z_1)}\\ &+\frac{f(z_1)(z_1-z)}{\pi}\iint_G\frac{d\sigma_\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z_1)^2}.\end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{d\sigma_\zeta}{(\zeta-z)^2(\zeta-z_1)}$$

$$=\frac{1}{\pi(z-z_1)}\iint_G \frac{d\sigma_\zeta}{(\zeta-z)^2}-\frac{1}{\pi(z-z_1)^2}\left(\iint_G \frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z}\right.$$

$$\left.-\iint_G \frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z_1}\right),$$

使用公式（2.9），就有

$$\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z}=-\bar{z}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\bar{\zeta}d\zeta}{\zeta-z}=-\bar{z}+\Phi_\Gamma(z).$$

从而

$$\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{d\sigma_\zeta}{(\zeta-z)^2(\zeta-z_1)}$$

$$=\frac{\Phi_\Gamma'(z)}{z-z_1}+\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{(z-z_1)^2}+\frac{\Phi_\Gamma(z_1)-\Phi_\Gamma(z)}{(z-z_1)^2},\quad z\neq z_1.$$

这样就可以把（3.38）改写为

(3.39) $$\Pi f(z_1)-\Pi f(z)$$

$$=\frac{z_1-z}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z_1)}d\sigma_\zeta$$

$$+\frac{z_1-z}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)-f(z_1)}{(\zeta-z)(\zeta-z_1)^2}d\sigma_\zeta$$

$$+\Big[f(z)-f(z_1)\Big]\left(\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{z_1-z}+\frac{\Phi_\Gamma(z_1)-\Phi_\Gamma(z)}{z_1-z}\right.$$

$$\left.-\Phi_\Gamma'(z)\right)+f(z_1)\Big[\Phi_\Gamma'(z_1)-\Phi_\Gamma'(z)\Big].$$

因为 $G\in C_\alpha^1$，所以根据 Cauchy 型积分性质可知 $\Phi_\Gamma(z)\in C_\alpha^1(\bar{G})$，又 $f\in C_\alpha(\bar{G})$，即

$$|f(z)-f(z_1)|\leqslant H(f,\alpha,\bar{G})|z-z_1|^\alpha,\ 0<\alpha<1,$$

再利用引理 3.1，则得

$$\left|\frac{1}{\pi}\iint\frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z_1)}d\sigma_\zeta\right|\leqslant\frac{H(f,\alpha,\bar{G})}{\pi}\iint_G\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z|^{2-\alpha}|\zeta-z_1|}$$

$$\leqslant M'(\alpha)H(f,\alpha,\bar{G})|z-z_1|^{\alpha-1}.$$

借助于此不等式，由 (3.39) 得

$$(3.40)\quad \begin{aligned}|\Pi f(z_1)-\Pi f(z)|&\leqslant 2M'(\alpha)H(f,\alpha,\bar{G})|z-z_1|^\alpha\\&+H(f,\alpha,\bar{G})|z_1-z|^\alpha[1+H(\Phi_\Gamma,G)+C(\Phi_\Gamma')]\\&+C_\alpha(f)H(\Phi_\Gamma')|z-z_1|^\alpha\\&\leqslant M(\alpha,G)C_\alpha(f,\bar{G})|z-z_1|^\alpha.\end{aligned}$$

这就表明 $\Pi f\in C_\alpha(\bar{G})$. 另外，当 $f\in C_\alpha(\bar{G})$ 时，从 (3.37) 式还可推得

$$(3\cdot41)\quad \begin{aligned}\Pi f&\leqslant M''(\alpha,G)H(f,\alpha,\bar{G})+C(f,\bar{G})C(\Phi_\Gamma',\ \bar{G})\\&\leqslant M'''(\alpha,G)C_\alpha(f,\bar{G}),\end{aligned}$$

于是由 (3.40) 与 (3.41) 可推出

$$C_\alpha(\Pi f,\bar{G})\leqslant M(\alpha,G)C_\alpha(f,\bar{G}).$$

这样就建立了：若 $f\in C_\alpha(\bar{G})$，则 $\Pi_G f\in C_\alpha(\bar{G})$，并且 $\Pi_G f$ 是把空间 $C_\alpha(\bar{G})$ 映为自身的线性算子.

3) 研究 $T_G f$ 的可微性. 仍设 $G\in C_\alpha^1$，$f\in C_\alpha(\bar{G})$. 令函数 $g(z)=T_G f$，当 z，$z_1\in G$ 且 $z\neq z_1$ 时

$$\frac{g(z_1)-g(z)}{z_1-z}-\Pi f$$

$$=\frac{z-z_1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z_1)}d\sigma_\zeta$$

$$+\frac{f(z)(z-z_1)}{\pi}\iint\limits_G\frac{d\sigma_\zeta}{(\zeta-z)^2(\zeta-z_1)}$$

$$=\frac{z-z_1}{\pi}\iint\limits_G\frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z_1)}d\sigma_\zeta$$

$$+\left[\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{z-z_1}+\Phi'_\Gamma(z)-\frac{\Phi_\Gamma(z)-\Phi_\Gamma(z_1)}{z-z_1}\right]f(z),$$

于是

$$\left|\frac{g(z_1)-g(z)}{z_1-z}-\Pi f-\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{z-z_1}f(z)\right|$$

$$\leqslant M'(\alpha)H(f,\alpha,\bar{G})|z-z_1|^\alpha$$

$$+\left|\Phi'_\Gamma(z)-\frac{\Phi_\Gamma(z)-\Phi_\Gamma(z_1)}{z-z_1}\right|C(f,\bar{G}).$$

现在，设 z_1 沿着与实轴交角为 θ 的射线

$$z_1-z=|z_1-z|e^{i\theta}$$

趋向于 z，由上式可得

$$\lim_{z_1\to z}\frac{g(z_1)-g(z)}{z_1-z}=\Pi_G f+e^{-2i\theta}f(z). \tag{3.42}$$

若在此极限中，分别令 $\theta=0$ 和 $\theta=\frac{\pi}{2}$，则得到 (3.34) 式，该式还可写为

$$\frac{\partial T_G f}{\partial \bar{z}}=f,\quad \frac{\partial T_G f}{\partial z}=\Pi f. \tag{3.43}$$

这样一来，因为 $f\in C_\alpha(\bar{G})$，$\Pi f\in C_\alpha(\bar{G})$，所以 $T_G f\in C_\alpha^1(\bar{G})$。并且有不等式

$$C_\alpha(\Pi f)\leqslant C_\alpha^1(T_G f)\leqslant M(\alpha,G)C_\alpha(f,\bar{G}). \tag{3.44}$$

此式表明 $T_G f$ 是空间 $C_\alpha(\bar{G})$ 中的全连续算子，并且映射此空间为 $C_\alpha^1(\bar{G})$。

4) 当 $m=1$ 时，$G\in C_\alpha^2$，$f\in C_\alpha^1(G)$，$0<\alpha<1$。我们来证明 $\Pi f\in C_\alpha^1(\bar{G})$。

先考虑 $f\in C^1(\bar{G})$。这时借助于公式（3·33）有

$$\Pi_G f=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\iint_{G_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\iint_{G_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)f(\zeta)d\sigma_\zeta$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\iint_{G_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial\zeta}\cdot\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\bar{\zeta}$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\bar{\zeta}.$$

由于 $f\in C^1(\bar{G})$，就有

$$\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right|<M\ (\text{常数}),$$

所以

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\bar{z}\right|\leqslant M\int_{|\zeta-z|=\varepsilon}|d\bar{\zeta}|+f(\zeta)\int_{|\zeta-z|=\varepsilon}\left|\frac{d\bar{\zeta}}{\zeta-z}\right|\to 0$$

（当 $\varepsilon\to 0$）。

从而得到

$$\Pi_G f=T_G\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\bar{\zeta},\tag{3.45}$$

对此式关于 $\bar{z}$ 求微商，可得

$$\frac{\partial\Pi_G f}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial f(z)}{\partial z},\quad f\in C^1(\bar{G}).\tag{3.46}$$

现在考虑当 $m=1$ 时，$G\in C_\alpha^2$，$f\in C_\alpha^1(\bar{G})$，$0<\alpha<1$，再对（3.45）式两边关于 z 求微商，利用（3.43）式得

$$(3.47)\qquad \frac{\partial \Pi_G f}{\partial z}=\Pi_G\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta.$$

由（3·46）和（3·47）看出，若 $G\in C_\alpha^2$，$f\in C_\alpha^1(\bar{G})$，则 $\Pi_G f\in C_\alpha^1(\bar{G})$，从而 $T_G f\in C_\alpha^2(\bar{G})$。

5）当 $m>1$ 时，继续作类似上述的讨论，可以证明：若 $G\in C_\alpha^{m+1}$，$f\in C_\alpha^m(\bar{G})$，$0<\alpha<1$，那么 $\Pi_G f\in C_\alpha^m(\bar{G})$，$T_G f\in C_\alpha^{m+1}(\bar{G})$，并且

$$(3\cdot 48)\qquad C_\alpha^m(\Pi f)\leqslant C_\alpha^{m+1}(Tf)\leqslant M(m,\alpha,G)C_\alpha^m(f,\ \bar{G}).$$

这就表明 Tf、Πf 都是空间 $C_\alpha^m(\bar{G})$ 中的全连续算子，它们分别把此空间映为 $C_\alpha^{m+1}(\bar{G})$ 与 $C_\alpha^m(\bar{G})$。

推论 3.5 设 $A(z)\in C_\alpha^m(\bar{G})$，$f\in C_\alpha^m(\bar{G})$，$G\in C_\alpha^{m+1}$，$0<\alpha<1$，则 $P_G f\equiv T_G(Af)\in C_\alpha^{m+1}(\bar{G})$。

事实上，由（3·48）式

$$C_\alpha^{m+1}(P_G f)\leqslant M(m,\alpha,G)C_\alpha^m(Af,\bar{G}).$$

再利用（1.9）式就得

$$C_\alpha^{m+1}(P_G f)\leqslant M'(m,\alpha)C_\alpha^m(A)C_\alpha^m(f)\leqslant M''(m,\alpha)C_\alpha^m(f).$$

这就意味着 $P_G f$ 是把 $C_\alpha^m(\bar{G})$ 映入 $C_\alpha^{m+1}(\bar{G})$的全连续算子。

定理 3.8 设 $f\in C_\alpha(\bar{G})$ 并且 $f(z_0)=0$，$z_0\in G$，则函数 $T_G f$ 在点 z_0 存在着对自变量的微商，并且

$$\left.\frac{dT_G f}{dz}\right|_{z=z_0}=\left.\Pi_G f\right|_{z=z_0}=-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\sigma_\zeta.$$

这个定理的结论，可根据(3.42) 式直接推出

$$\left.\frac{dT_G f}{dz}\right|_{z=z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=\left.\Pi f\right|_{z=z_0}+e^{-2i\theta}f(z_0)$$

$$=\left.\Pi f\right|_{z=z_0}.$$

§4 积分 Πf 的性质

前面由 $T_G f$ 的可微性引出了积分 $\Pi_G f$，证明了它在Cauchy主值意义下是存在的，并且它是空间 $C_\alpha^m(\bar{G})$ 中的线性有界算子，把这个空间映为自身。下面，我们进一步讨论它的某些性质。

一、$\Pi_G f$ 在区域边界 Γ 上不连续的情形

前面已经证明，若 $f\in L_p(\bar{G})$，$p>2$，则 $T_G f$ 在全平面上连续，那么函数 $\Pi_G f$ 是否也如此呢？

设 $\Gamma\in C^2$，$f\in C_\alpha^1(\bar{G})$，那么我们可以认为函数 f 延拓到 $\bar{G}$ 外且仍属于同样的函数类。于是公式（3·45）对 $z\in G+\Gamma$ 仍然有效。

令 Γ：$\zeta=t(s)$，则 $d\bar{\zeta}=\overline{t'(s)}ds=[\overline{t'(s)}]^2 t'(s)ds=(\bar{t}')^2 dt$，因而

$$\Pi f=T(f_z)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)(\bar{t}')^2}{t-z}dt,$$

根据 Сохочкий-Plemelj 公式并注意到 $T(f_z)$ 的连续性，可推得

$$(4.1)\qquad (\Pi f)^+-(\Pi f)^-=-f(t)\left(\frac{d\bar{t}}{ds}\right)^2,\quad t\in\Gamma.$$

这就表明 $\Pi_G f$ 通过边界 Γ 时有跳跃。

二、$L_p C_\alpha^m(E)$ 上的 Πf 及其在全平面上的 Hölder 连续性.

集合 $L_p C_\alpha^m(E)$ 表示 $L_p(E)$ 与 $C_\alpha^m(E)$ 的交集，若以

$$L_p C_\alpha^m(f,E)=L_p(f,E)+C_\alpha^m(f,E)$$

来定义 $L_p C_\alpha^m(E)$ 中的元素的范数，那么它就成为一个 Banach 型空间。

定理 4.1 若 $f\in L_pC_\alpha^m(E)$，$0<\alpha<1$，$1\leq p<2$，则 $\Pi f\in C_\alpha^m(E)$ 并且 $T_zf\in L_pC_\alpha^{m+1}(E)$。

证 不妨先设 $m=0$，按以下几步考虑：

1) 设 G 是圆 $|z|<R$，其边界 Γ：$|z|=R$，那么

$$\Phi_\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\bar{\xi}}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{R^2}{(\xi-z)\xi}d\xi=0,$$

$$\Phi_\Gamma'(z)=0,\quad z\in G$$

于是，根据 (3·39) 式有

$$(4\cdot2)\qquad |\Pi f(z_1)-\Pi f(z)|\leq 2M'(\alpha)H(f,\alpha,E)|z_1-z|^\alpha$$
$$+H(f,\alpha,E)|z_1-z|^\alpha\leq M(\alpha)H(f,\alpha,E)|z_1-z|^\alpha,$$
$$M(\alpha)=1+2M'(\alpha).$$

由于上式的右端与 R 无关，所以当 $R\to\infty$ 时该式仍然成立，因而

$$|\Pi_Ef(z_1)-\Pi_Ef(z)|\leq M(\alpha)H(f,\alpha,E)|z_1-z|^\alpha.$$

这表明：若 $f\in H_\alpha(E)$，则 $\Pi_Ef\in H_\alpha(E)$，即 Π_Ef 在全平面是 Hölder 连续的

2) 证明 $\Pi_Ef\in C_\alpha(E)$。事实上，由于

$$\iint_{|\xi|<1}\frac{d\sigma_\xi}{\xi^2}=0,$$

则

$$\Pi_Ef=-\frac{1}{\pi}\iint_E\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\sigma_\xi$$

$$=-\frac{1}{\pi}\iint_{E_1}\frac{f(\xi+z)-f(z)}{\xi^2}d\sigma_\xi-\frac{1}{\pi}\iint_{|\xi|>1}\frac{f(\xi+z)}{\xi^2}d\sigma_\xi.$$

但是

$$\left|-\frac{1}{\pi}\iint_{E_1}\frac{f(\xi+z)-f(z)}{\xi^2}d\sigma_\xi\right|\leq\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}H(f,\alpha,E)r^{\alpha-1}drd\theta$$

$$= \frac{2}{\alpha} H(f, \alpha, E)$$

又当 $p>1$ 时利用 Hölder 不等式，有

$$\left| \iint\limits_{|\xi|\geq 1} \frac{f(\xi+z)}{\xi^2} d\sigma_\xi \right| \leqslant L_p(f, E) \left(\frac{\pi}{q-1} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

而当 $p=1$ 时，

$$\left| \iint\limits_{|\xi|\geq 1} \frac{f(\xi+z)}{\xi^2} d\sigma_\xi \right| \leqslant \iint\limits_{|\xi|\geq 1} |f(\xi+z)| d\sigma_\xi \leqslant L_1(f, E),$$

这样就有

$$(4.3) \qquad \left| \Pi_E f \right| \leqslant \frac{2}{\alpha} H(f, \alpha, E) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{q-1} \right)^{\frac{1}{q}} L_p(f, E)$$

$$\leqslant M_1(p, \alpha)[L_p(f, E) + H(f, \alpha, E)].$$

于是根据(4.2)和(4.3)推出

$$C_\alpha(\Pi_E f, E) \leqslant M_2(p, \alpha)[L_p(f, E) + H(f, \alpha, E)].$$

由此可知，若 $f \in L_p C_\alpha(E)$，$p \geqslant 1$，则 $\Pi_E f \in C_\alpha(E)$.

3) 在 G: $|z| \leqslant R$ 内有不等式

$$\left| \frac{T_G f(z_1) - T_G f(z)}{z_1 - z} - \Pi_E f - \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{z - z_1} f(z) \right|$$

$$\leqslant M(\alpha) H(f, \alpha, E) |z - z_1|^\alpha.$$

显然，此不等式当 $R \to \infty$ 时仍然成立. 由此推出

$$\frac{\partial T_E f}{\partial \bar{z}} = f(z), \qquad \frac{\partial T_E f}{\partial z} = \Pi_E f.$$

这表明：若 $f \in L_p C_\alpha(E)$，则 $T_E f \in L_p C_\alpha^1(E)$.

上述证明了当 $m=0$ 时的定理 4.1，对于任意的 $m>0$，定理可类似地证明.

三、关于算子Πf的扩充

我们将说明算子Πf可以推广成为空间$L_p(p>1)$中的线性有界算子。先证明几个引理。

引理 4.1 若f与$g\in D_\infty^0(E)$，则

$$(4.4)\qquad (\Pi f,\ g)=(f,\bar{\Pi}g),\quad (f,g)=\iint_E f(z)\overline{g(z)}d\sigma_z,$$

其中

$$\Pi f=-\frac{1}{\pi}\iint_E\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\sigma_\xi,\quad \bar{\Pi}f=-\frac{1}{\pi}\iint_E\frac{f(\xi)}{(\bar{\xi}-\bar{z})^2}d\sigma_\xi.$$

证 由于$f\in D_\infty^0(E)$，于是根据公式（3.45）和（3.46）有

$$(4.5)\qquad \Pi f=\frac{\partial Tf}{\partial z}=T\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial \Pi f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

借助于分部积分并利用公式（3.30）和（3.33），可得

$$(\Pi f,g)=\lim_{R\to\infty}\iint_{|z|\leq R}\Pi f\cdot\bar{g}d\sigma_z=\lim_{R\to\infty}\iint_{|z|\leq R}\frac{\partial Tf}{\partial z}\cdot\bar{g}d\sigma_z$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{-1}{2i}\int_{|z|=R}(Tf\cdot\bar{g})d\bar{z}\right.$$

$$\left.-\iint_{|z|\leq R}\left(-\frac{1}{\pi}\iint_E\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\sigma_\xi\right)\frac{\partial\bar{g}}{\partial z}d\sigma_z\right]$$

$$=\lim_{R\to\infty}\iint_E f(z)\left(\frac{-1}{\pi}\iint_{|\xi|<R}\frac{\frac{\partial\bar{g}}{\partial\xi}d\sigma_\xi}{\xi-z}\right)d\sigma_z$$

$$=\iint_E f(z)T\left(\frac{\partial\bar{g}}{\partial z}\right)d\sigma_z=\iint_E f\Pi\bar{g}d\sigma_z=(f,\ \bar{\Pi}g).$$

这个结果表明Π与$\bar{\Pi}$在$D_\infty^0(E)$上是互相共轭的算子。

引理 4.2 若$f\in D_\infty^0(E)$，则

(4.6) $$\bar{\Pi}\Pi f=f.$$

证 利用(4.5)式有

(4.7) $$\bar{\Pi}\Pi f=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\bar{T}(\Pi f)=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\bar{T}\left(\frac{\partial Tf}{\partial z}\right),$$

根据公式(2.10)，在圆 $|z|<R$ 内有

$$Tf=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R}\frac{Tf}{\bar{\xi}-\bar{z}}d\bar{\xi}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\xi|<R}\frac{\partial Tf}{\partial\xi}\frac{d\sigma_\xi}{\bar{\xi}-\bar{z}},$$

因为 $Tf=o(|z|^{-1})$，那么

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R}\frac{Tf d\bar{\xi}}{\bar{\xi}-\bar{z}}=0,$$

因此

$$Tf=-\frac{1}{\pi}\iint_E\frac{\partial Tf}{\partial\xi}\cdot\frac{d\sigma_\xi}{\bar{\xi}-\bar{z}}=\bar{T}\left(\frac{\partial}{\partial z}Tf\right).$$

将此式两边关于 $\bar{z}$ 微分，利用(4·7)，则得

$$f=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\bar{T}\left(\frac{\partial}{\partial z}Tf\right)=\bar{\Pi}\Pi f.$$

这个结果表明在 $D_\infty^0(E)$上，$\bar{\Pi}$ 就是算子 Π 的逆算子 Π^{-1}。

引理 4.3 若 f 和 $h\in D_\infty^0(E)$，则

(4.8) $$(\Pi f,\ \Pi h)=(f,h).$$

证 利用引理 4.1，令 $g=\Pi h$，并且考虑到 (4.6) 式，易知

$$(\Pi f,\ \Pi h)=(f,\bar{\Pi}\Pi h)=(f,h).$$

若令 $f=h$，则由 (4.8) 式有

$$(\Pi f,\ \Pi f)=(f,f),$$

即

$$L_2(\Pi f,\ E)=L_2(f,\ E)\ \text{或}\ \|\Pi f\|_{L_2(E)}=\|f\|_{L_2(E)}.$$

这表明算子 Π 具有么算子的性质。若以 Λ_p 表示算子 Π 在空间 $L_p(E)$ 中的范数：$\Lambda_p=\|\Pi\|_{L_p}=L_p(\Pi)$，$p>1$，那么由于 $D_\infty^0(E)$ 在 $L_2(E)$ 中稠密，所以对于 $f\in L_2(E)$ 可得 $\Lambda_2=L_2(\Pi)=1$。

下面讨论当 p 充分接近 2 时，算子 Π 的范数 Λ_p 所具有的性质。为此，先证明一维和二维情形的 Calderon-Zrgmund 不等式。

引理 4·4 设 $f\in L_p(R)$，$p>1$，并且

$$Hf(x)=pr.v.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-x}dt,$$

则

$$L_p(Hf,\ R)\leqslant A_pL_p(f,R), \tag{4.9}$$

其中 R 为实数轴，$A_p=A(p)$ 是 p 的连续函数，$A_2=1$。

证 因 $D_\infty^0(R)$ 稠密于 $L_p(R)$，所以不妨设 $f\in D_1^{'}(R)$。令

$$F(\zeta)=u+iv=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-\zeta}dx,\quad \zeta=\xi+i\eta,\quad \eta>0,$$

其虚部 $v(\xi,\eta)$ 是一个 Poisson 积分并且 $v(\xi,0)=f(\xi)$，而实部是

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+\eta^2}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{f(\xi+x)-f(\xi-x)}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2+\eta^2}dx,\quad \eta>0.$$

当 $\eta\to 0$ 时，得到 $u(\xi,0)=Hf(\xi)$。令

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2},$$

考虑到关于 u 与 v 的 Cauchy-Riemann 关系式和 $\Delta u=\Delta v=0$，则有

$$\Delta|u|^p=p(p-1)|u|^{p-2}(u_x^2+u_y^2);$$

$$\Delta|v|^p = p(p-1)|v|^{p-2}(u_x^2+u_y^2);$$

$$\Delta|F|^p = p^2|F|^{p-2}(u_x^2+u_y^2).$$

我们先考虑 $2\leqslant p<\infty$ 的情形．由于 $|u|\leqslant|F|$，所以从上述等式得到

$$\Delta\left(|F|^p-\frac{p}{p-1}|u|^p\right)=p^2(|F|^{p-2}-|u|^{p-2})(u_x^2+u_y^2)\geqslant 0.$$

在区域 $D=\{\eta>\eta_0,\ \xi^2+\eta^2<R^2\}$ 内对函数 $\varphi\equiv 1$ 和 $\Psi=|F|^p-p|u|^p/(p-1)$ 应用 Creen 公式

$$\iint_D(\varphi\Delta\Psi-\Psi\Delta\varphi)d\xi d\eta=\int_\Gamma\left(\varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n}-\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds,$$

有

$$0\leqslant\iint_D\Delta\left(|F|^p-\frac{p}{p-1}|u|^p\right)d\xi d\eta$$

$$=\int_{\alpha_0}^{\pi-\alpha_0}\frac{\partial}{\partial R}\left(|F|^p-\frac{p}{p-1}|u|^p\right)_{\zeta=Re^{i\theta}}d\theta$$

$$-\int_{-R_0}^{R_0}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(|F|^p-\frac{p}{p-1}|u|^p\right)_{\zeta=\xi+i\eta_0}d\xi,$$

其中 $\alpha_0=\arcsin(\eta_0/R)$，$R_0=R\cos\alpha_0$．显然，当 $R\to\infty$ 时，上面等号右边的第一个积分趋于 0．因此，对 $\eta=\eta_0>0$ 有

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\int_{-\infty}^{\infty}\left(|F|^p-\frac{p}{p-1}|u|^p\right)d\xi\equiv\frac{d\int_{-\infty}^{\infty}\Psi d\xi}{d\eta}\leqslant 0.$$

由于当 $\eta\to\infty$ 时，$\Psi(\eta)\to 0$，因而对 $\eta>0$ 由上式得到 $\Psi(\eta)\geqslant 0$，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\xi+i\eta)|^pd\xi\geqslant\frac{p}{p-1}\int_{-\infty}^{\infty}|u(\xi+i\eta)|^pd\xi,\quad \eta>0.$$

再注意到显然的关系式

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F|^p d\xi\right)^{2/p}=\left\|u^2+v^2\right\|_{L_{p/2}}\leqslant\left\|u^2\right\|_{L_{p/2}}+\left\|v^2\right\|_{L_{p/2}},$$

则得到

$$\left(\frac{p}{p-2}\right)^{2/p}\left\|u^2\right\|_{L_{p/2}}\leqslant\left\|u^2\right\|_{L_{p/2}}+\left\|v^2\right\|_{L_{p/2}}.$$

因此

$$\left\|u^2\right\|_{L_{p/2}}\leqslant\frac{1}{\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^{2/p}-1}\left\|v^2\right\|_{L_{p/2}}.$$

也就是

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u|^p d\xi\leqslant\left[\frac{1}{\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^{2/p}-1}\right]^{p/2}\int_{-\infty}^{\infty}|v|^p d\xi.$$

再令 $\eta\to 0$，则得到不等式（4·9）. 对于 $1<p\leqslant 2$ 的情形，可以用类似的方法处理. 显然 $A_p=A(p)$ 是 p 的连续函数，并且 $A_2=1$.

引理 4·5 设 $f\in L_p(E)$，$p>1$，则 $\Pi f\in L_p(E)$，并且

(4·10) $$\left\|\Pi f\right\|_{L_p(E)}\leqslant\Lambda_p\left\|f\right\|_{L_p(E)}$$

$$(\text{或 } L_p(\Pi f,E)\leqslant\Lambda_p L_p(f,E)).$$

证 我们不妨设 $p>2$，并且 $f\in D_2^0(E)$. 定义算子

$$\Pi^*f(\xi)=\frac{1}{2\pi}\iint_B\frac{f(\xi+z)}{z|z|}d\sigma_z.$$

令 $z=re^{i\theta}$，则

$$\Pi^*f(\xi)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{f(\xi+re^{i\theta})-f(\xi-re^{i\theta})}{r}dr\right)e^{-i\theta}d\theta.$$

于是

(4.11) $L_p(\Pi^*f,\ E)\leqslant$

$$\frac{\pi}{2}\max_{\theta}\left\|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(\xi+re^{i\theta})-f(\xi-re^{i\theta})}{r}dr\right\|_{L_p(E)}.$$

若用$\xi e^{i\theta}$代替ξ，那么上式右边的范数是不变的，并且其中的积分是$Hf_\theta(\xi)$，这里$f_\theta(\xi)=f(\xi e^{i\theta})$。显然，利用引理4·4可得

$$\left\|Hf_\theta\right\|^p_{L_p(E)}=\iint_E |Hf_\theta(u+iv)|^p dudv \leqslant A_p^p\int_{-\infty}^\infty dv\int_{-\infty}^\infty |f_\theta(u+iv)|^p du = A_p^p\left\|f_\theta\right\|^p_{L_p(E)}.$$

代入(4·11)，则得

$$L_p(\Pi^*f,E)\leqslant\frac{\pi}{2}A_pL_p(f,E). \tag{4·12}$$

下面根据连续性把Π^*推广到L_p上，我们利用$\Pi f=-\Pi^*\Pi^*f$来证明(4·10)，当然也可以把Π推广到L_p上。首先注意到

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|z|}=-\frac{1}{2z|z|},$$

那么

$$\begin{aligned}\Pi^*f&=-\frac{1}{\pi}\iint_E f(z+\xi)\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{1}{|z|}d\sigma_z \\ &=\frac{1}{\pi}\iint_E f_z(z+\xi)\frac{1}{|z|}d\sigma_z \\ &=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\iint_E f(z)\frac{d\sigma_z}{|z-\xi|} \\ &=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\iint_E f(z)\left(\frac{1}{|z-\xi|}-\frac{1}{|z|}\right)d\sigma_z.\end{aligned} \tag{4.13}$$

由于对任意$\varphi\in D_1^0(E)$都有

$$\iint_E \Pi^*f\cdot\varphi_{\xi}d\sigma_{\xi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \iint\limits_E f(z)\left(\frac{1}{|z-\xi|}-\frac{1}{|z|}\right)\varphi(\xi)d\sigma_z d\sigma_\xi,$$

此式右边的积分是绝对收敛的，因而对 $f\in L_p(E)$ 这个等式保持有效，从而在广义下(4·13) 也有效。

现在，我们可以写出

$$\Pi^*\Pi^*f(w)=\frac{1}{\pi}\ \frac{\partial}{\partial w}\iint\limits_E \Pi^*f(\zeta)\left(\frac{1}{|\zeta|-w|}+\frac{1}{|\zeta|}\right)d\sigma_\zeta$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\ \frac{\partial}{\partial w}\left[\iint\limits_E\left(\frac{1}{|\zeta-w|}-\frac{1}{|\zeta|}\right)d\sigma_\zeta\iint\limits_E\frac{f_z d\sigma_z}{|z-\zeta|}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\ \frac{\partial}{\partial w}\left[\iint\limits_E f_z d\sigma_z\iint\limits_E\frac{1}{|z-\zeta|}\left(\frac{1}{|\zeta-w|}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{|\zeta|}\right)d\sigma_\zeta\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi^2}\ \frac{\partial}{\partial w}\iint\limits_E f\frac{\partial}{\partial z}\left(\iint\limits_E\frac{1}{|z-\zeta|}\left(\frac{1}{|\zeta-w|}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{|\zeta|}\right)d\sigma_\zeta\right)d\sigma_z,$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_E\frac{1}{|z-\zeta|}\left(\frac{1}{|\zeta-w|}-\frac{1}{|\zeta|}\right)d\sigma_\zeta$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{|\zeta-w|<R}\frac{1}{|z-\zeta|}\cdot\frac{1}{|\zeta-w|}d\sigma_\zeta-\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{|\zeta|<R}\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta||z-\zeta|}\right]$$

$$=\lim_{R\to\infty}(I_1+I_2).$$

利用变量代换计算

$$I_1=\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{|\zeta|<R/|z-w|}\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta||1-\zeta|}=\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{\frac{R}{|z-w|}}\int_0^{2\pi}\frac{dr\,d\theta}{|1-re^{i\theta}|}$$

$$=-\frac{R}{2(z-w)|z-w|}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left|1-\frac{Re^{i\theta}}{|z-w|}\right|}\to\frac{-\pi}{z-w}\text{（当}R\to\infty\text{）}.$$

类似地，当 $R\to\infty$ 时，得到 $I_2\to-\frac{\pi}{z}$. 因此有

$$(4\cdot14)\qquad \Pi^*\Pi^*f(w)=\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{1}{\pi}\iint\limits_E f(z)\left(\frac{1}{z-w}-\frac{1}{z}\right)d\sigma_z\right.$$

$$=-\Pi f(w).$$

联合（4·12）与（4·14）即可推出（4·10）.

根据（4·10）式，我们来证明 Riesz-Thorin 凸性定理.

定理 4·2（Riesz-Thorin） 设 Λ_p 是引理 4·5 中的常数，则 $\log\Lambda_p$ 是 $\frac{1}{p}$ 的凸函数.

证 考虑 $p_i\geqslant2$，$p_i=\frac{1}{a_i}$，$i=1.2$. 假定

$$L_{\frac{1}{a_i}}(\Pi f)\leqslant\Lambda_{\frac{1}{a_i}}L_{\frac{1}{a_i}}(f),\quad i=1.2.$$

如果 $a=(1-t)a_1+ta_2$，那么需要证明下式成立：

$$(4\cdot15)\qquad L_{\frac{1}{a}}(\Pi f)\leqslant\Lambda_{\frac{1}{a_1}}^{(1-t)}\Lambda_{\frac{1}{a_2}}^{t}L_{\frac{1}{a}}(f),\quad 0\leqslant t\leqslant1.$$

设 $a+b=1$，$a_0+b_0=1$，注意到对 $g\in L_{\frac{1}{b}}(E)$ 且 $L_{\frac{1}{b}}(g,E)=1$（或记为 $\|g\|_{\frac{1}{b}}=1$），有

$$L_{\frac{1}{a}}(\Pi f,E)=\sup_g\iint\limits_E\Pi f\cdot g\,d\sigma_\zeta.$$

由于具有紧支集的简单函数（具有有限值的可测函数）在 L_p 中是稠密的，所以我们考虑简单函数 f 和 g，令

$$I=\iint_E \Pi f\cdot g d\sigma_\zeta.$$

证明的思想是构造 f 和 g，它们的解析性是由复变量 ζ 决定的。I 将是某一解析函数 $\Phi(\zeta)$ 的特殊值，并且利用最大模原理我们能够估计它的最大模。下面来具体构造 $\Phi(\zeta)$。

对任意复数 ζ，定义

$$F(\zeta)=|f|^{\frac{a(\zeta)}{a}}\cdot\frac{f}{|f|},\quad G(\zeta)=|g|^{\frac{b(\zeta)}{b}}\frac{g}{|g|},$$

其中 $a(\zeta)=(1-\zeta)a_1+\zeta a_2$；$b(\zeta)=1-a(\zeta)$。注意，引入 ζ 作为参数，那么 $F(\zeta)$ 与 $G(\zeta)$ 就是 z 的函数。我们约定当 $f=0$，$g=0$ 时，$F(\zeta)=0$，$G(\zeta)=0$。特别，取 $\zeta=t$ 这个特殊值时，就有 $F(t)=f$，$G(t)=g$。我们令

$$\phi(\zeta)=\Pi F(\zeta)\cdot G(\zeta).$$

由于 $F(\zeta)$，$G(\zeta)$ 本身都是简单函数：$F(\zeta)=\sum_i F_i x_i$，$G(\zeta)=\sum_j G_j x_j^*$，于是

$$\Phi(\zeta)=\iint_E \phi(\zeta)d\sigma_\zeta=\sum_{i,j}F_iG_j\iint \Pi x_i\cdot x_j^* d\sigma_\zeta.$$

立刻看出它是一个指数多项式：$\Phi(\zeta)=\sum_i d_i e^{\lambda_i\zeta}$，其中 λ_i 为实数。因此当 $\xi=\mathrm{Re}\zeta$ 保持有界时，$\Phi(\zeta)$ 是有界的。

现在考虑 $\xi=0$ 与 $\xi=1$ 的特殊情形. 对 $\xi=0$ 有 $\mathrm{Re}a(\xi)=a_1$，因此

$$|F(\zeta)| = |f|^{\frac{a_1}{a}}, \qquad G(\zeta) = |g|^{\frac{a_0}{b}},$$

由此得出

$$\left\|F(\zeta)\right\|_{\frac{1}{a_1}} = \left(\left\|f\right\|_{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a_1}{a}}, \quad \left\|G(\zeta)\right\|_{\frac{1}{a_0}} = \left(\left\|g\right\|_{\frac{1}{b}}\right)^{\frac{a_0}{b}} = 1.$$

为了简单起见，我们可以假定$\left\|f\right\|_{\frac{1}{a}} = 1$，于是得到

$$\left|\Phi(\zeta)\right| = \left|\iint_E \Pi F(\zeta)\cdot G(\zeta)\,d\sigma_\zeta\right| \leqslant \left\|\Pi F(\zeta)\right\|_{\frac{1}{a_1}} \left\|G(\zeta)\right\|_{\frac{1}{a_0}}$$

$$\leqslant A_{\frac{1}{a_1}}.$$

根据对称的原因，当$\xi = 1$时，同理可得

$$|\Phi(\zeta)| \leqslant A_{\frac{1}{a_2}}.$$

在条形$0 \leqslant \operatorname{Re}\zeta = \xi \leqslant 1$的边界上，有

$$\log\left|\Phi(\zeta)\right| - (1-\xi)\log A_{\frac{1}{a_1}} - \xi\log A_{\frac{1}{a_2}} \leqslant 0, \tag{4·16}$$

由于该式左边是一个次调和函数，所以在整个条形域$0 \leqslant \operatorname{Re}\zeta \leqslant 1$内不等式（4·16）成立，从而

$$|\Phi(\zeta)| \leqslant A_{\frac{1}{a_1}}^{(1-\xi)} A_{\frac{1}{a_2}}^{\xi}.$$

令$\zeta = t$，则得（4·15）式：

$$\left\|\Pi f\right\|_{\frac{1}{a}} = \sup_g \iint_E \Pi f\cdot g\,d\sigma_\zeta$$

$$= \left|\Phi(\zeta)\right|_{\zeta=t} \leqslant A_{\frac{1}{a_1}}^{(1-t)} A_{\frac{1}{a_2}}^{t} \left\|f\right\|_{\frac{1}{a}}.$$

由此，显然有

$$\Lambda_{\frac{1}{a}} \leqslant \Lambda_{\frac{1}{a_1}}^{(1-t)} \Lambda_{\frac{1}{a_2}}^{t}.$$

令$\frac{1}{a}=p$，则$\frac{1}{p}=a=(1-t)a_1+ta_2$，

$$\log \Lambda_p \leqslant (1-t)\log \Lambda_{\frac{1}{a_1}} + t\log \Lambda_{\frac{1}{a_2}}. \tag{4·17}$$

这就表明 $\log\Lambda_p$ 是$\frac{1}{p}$的凸函数。

根据上述结果，我们可以得到算子 II 的范数 Λ_p **的一个重要性质**：当 $p\to 2$ 时，范数 $\Lambda_p \to 1$。

事实上，由于 $p_i=\frac{1}{a_i}\geqslant 2$，$i=1$，2，不妨可以在（4·17）中取$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{1}{3}$，这样，对 $0\leqslant t\leqslant 1$ 就有 $p=\frac{1}{a}=\frac{1}{(1-t)\frac{1}{2}+\frac{t}{3}}$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{t}{6}}\geqslant 2$，而（4·17）变为

$$\log\Lambda_p \leqslant (1-t)\log\Lambda_2 + t\log\Lambda_3, \quad (0\leqslant t\leqslant 1). \tag{4·18}$$

但是，当 $p\to 2$ 时，$t\to 0$，所以

$$\lim_{p\to 2}\log\Lambda_p = \log(\lim_{p\to 2}\Lambda_p) \leqslant \lim_{t\to 0}(1-t)\log\Lambda_2 +$$
$$+\lim_{t\to 0} t\log\Lambda_3 = \log\Lambda_2.$$

这表明

$$\lim_{p\to 2}\Lambda_p = \Lambda_2.$$

因为 $\Lambda_2=1$，所以 $\lim\limits_{p\to 2}\Lambda_p=1$，这就是说：对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $|p-2|<\delta$ 时，有 $\Lambda_p-1<\varepsilon$，从而对于任给的 q_0：$0\leqslant q_0<1$，总存在 $\varepsilon>0$，使得当 $2<p_0<2+\varepsilon$ 时，

(4·10) 中的常数 Λ_p 适合不等式：

$$q_0\Lambda_{p_0}<1. \tag{4·19}$$

四、空间 $L_p(E)$ 内函数 Tf 的可微性

在定理 3·7 中，我们讨论了在 $C_a^m(\bar{G})$ 中函数 Tf 的可微性。现在转到较广的空间 $L_p(E)(p>1)$ 中来考虑 Tf 的可微性，有下述定理。

定理 4·3 若 $f\in L_p(E)$，$p>1$，则 Tf 有对 z 的广义微商

$$\frac{\partial Tf}{\partial z}=\Pi f$$

或写为

$$\frac{\partial Tf}{\partial x}=f+\Pi f,\qquad \frac{\partial Tf}{\partial y}=-if+i\Pi f.$$

证 设 G 为任意有界域，那么只要对 $\varphi(z)\in D_1^0(G)$ 证明

$$\iint_G (Tf\cdot\varphi_z+\Pi f\cdot\varphi)d\sigma_z=0 \tag{4·20}$$

就可以了。

设 $f_n\in D_\infty^0(G)$，并且当 $n\to\infty$ 时，$L_p(f_n-f,\bar{G})\to 0$。根根 (4·10) 有

$$L_p(\Pi(f_n-f),\bar{G})\leqslant\Lambda_pL_p(f_n-f,\ \bar{G}).$$

另外可以证明（见附注）

$$L_\gamma(T(f_n-f),\ \bar{G})\leqslant M(p,\gamma,G)L_p(f_n-f,\bar{G}),$$

$$1<\gamma<\frac{2p}{2-p},\ 1<p<2.$$

这两个不等式表明 Πf_n 与 Tf_n 相应地平均收敛于 Πf 与 Tf，因之它们也分别弱收敛于 Πf 与 Tf。又因为

$$\iint_G(Tf_n\cdot\varphi_z+\Pi f_n\cdot\varphi)d\sigma_z=0\ (n=1,2,3,\cdots). \tag{4·21}$$

于是将（4·21）式取极限即得（4·20）式.

定理 4·4 若 $f_{\bar z}\in L_p(G), p>1$, 则 f_z 存在并且 $f_z\in L_p(G)$.

证 根据定理 2·6，有

$$f(z)=\Phi(z)+Tf_{\bar z},\quad \Phi\in \mathfrak{A}_0(G_1),\quad \bar G_1\subset G.$$

再由定理 4·3 可得

$$f_z=\Phi'(z)+\Pi f_{\bar z}\in L_p(G_1).$$

附注：1）设 G 为有界域，若 $f\in L_p(\bar G)$，$1\leqslant p\leqslant 2$，则

$$L_\gamma(T_G f,\ \bar G)\leqslant M(p,\gamma,G)\ L_p(f,\bar G), \tag{4·22}$$

其中 γ 为满足不等式 $1<\gamma<\dfrac{2p}{2-p}$ 的任意数.

事实上，我们先假定 $p<\gamma<\dfrac{2p}{2-p}$，于是

$$\left|T_G f\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\iint_G\left|f(\zeta)\right|^{\frac{p}{\gamma}}\left|\zeta-z\right|^{-\frac{2}{\gamma}+\alpha}\left|f(\zeta)\right|^{p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}\right)}$$

$$\left|\zeta-z\right|^{-\frac{2}{q}+\alpha}d\sigma_\zeta,\quad q=\frac{p}{p-1},$$

其中 $\alpha=\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{2}>0$. 由于 $\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{r-p}{p\gamma}+\dfrac{1}{q}=1$，那么利用 Hölder不等式可得

$$\left|T_G f\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\left(\iint_G\left|f(\zeta)\right|^p\left|\zeta-z\right|^{-2+\gamma\alpha}d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{4·23}$$

$$\left(\iint_G\left|f(\zeta)\right|^p d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}}\left(\iint_G\left|\zeta-z\right|^{-2+q\alpha}d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{q}}.$$

因为当 $\lambda>0$ 时，常数

$$M(\lambda,G)=\sup_{z\in E}\iint_G\left|\zeta-z\right|^{-2+\lambda}d\sigma_\zeta<\infty,$$

所以从（4·23）得到

$$\iint_G \left| T_G f \right|^\gamma d\sigma_z \leqslant \frac{1}{\pi^\gamma}\left[M(q\alpha, G) \right]^{\frac{\gamma}{q}} \left(L_p(f, \bar{G}) \right)^{\gamma - p}$$

$$\iint_G \left| f(\zeta) \right|^p d\sigma_\zeta \iint_G \left| \zeta - z \right|^{-2+\gamma\alpha} d\sigma_z$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^\gamma}\left[M(q\alpha, G) \right]^{\frac{\gamma}{q}} \cdot M(\gamma\alpha, G) \left[L_p(f, \bar{G}) \right]^\gamma \cdot$$

由此立即可得出不等式（4·22）。显然，现在可以取消$\gamma > p$的限制。

С.П.Соболев用了一个重要的不等式证明当$\gamma = \dfrac{2p}{2-p}$时，不等式（4·22）仍然成立。

2）算子Πf在C_α空间中具有积分表示式

$$\Pi f = -\frac{1}{\pi}\iint_E \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma_\zeta, \tag{4·24}$$

这个积分在*Cauchy*主值意义下是存在的。在这里我们指出：若$f \in L_p(E)$，$p > 1$，则等式（4·24）的右端在主值意义下几乎处处存在并且等于Πf。

§5 函数类$D_z(G)$与$D_{\bar z}(G)$的性质

根据前面的结果，我们再讨论$D_z(G)$与$D_{\bar z}(G)$函数类的一些性质。显然，这里只需考虑函数类$D_{\bar z}(G)$就可以了。

定理 5·1 设$f \in D_{1,p}(G)$，$1 < p < 2$，$g \in C_{1,q}(G)$，$q = \dfrac{2p}{3p-2}$，则$fg \in D_{\bar z}(G)$，并且

$$(fg)_{\bar z} = f \cdot g_{\bar z} + f_{\bar z} \cdot g. \tag{5·1}$$

证 设 G_1 是 G 的某个子域，$\bar{G}_1\subset G$，根据定理 2·6 可知

$$f(z)=\Phi+Tf_1,\quad g(z)=\Psi(z)+Tg_1,$$

其中 $f_1=f_{\bar z}$，$g_1=g_{\bar z}$，$Tf_1=T_{G_1}f_1$，Φ 与 $\Psi\in\mathfrak{A}_0(G_1)$。于是

$$fg=h+Tf_1Tg_1,\quad h=\Phi\Psi+\Phi Tg_1+\Psi Tf_1.$$

这里应注意：若 f 和 g 只要有一个函数属于 $C^1(G)$，那么公式 (5·1) 就成立。事实上，不妨设 $f\in C^1(G)$，则对任意 $\varphi\in D_1^0(G_1)$，按 $g_{\bar z}$ 的定义

$$\iint_{G_1}[g(f\varphi)_{\bar z}+g_{\bar z}(f\varphi)]d\sigma_z=0.$$

此即

$$(5\cdot2)\qquad \iint_{G_1}\Big[fg\varphi_{\bar z}+(f_{\bar z}g+g_{\bar z}f)\varphi\Big]d\sigma_z$$

$$=\iint_{G_1}\Big[fg\cdot\varphi_{\bar z}+(fg)_{\bar z}\varphi\Big]d\sigma_z=0.$$

这表明 (5·1) 式成立。这样一来，对 h 就有

$$\frac{\partial h}{\partial\bar z}=\Phi\frac{\partial Tg_1}{\partial\bar z}+\Psi\frac{\partial Tf_1}{\partial\bar z}=\Phi g_1+\Psi f_1.$$

余下还需证明 Tf_1Tg_1 也适合 (5·1) 式，即对 $\varphi\in D_1^0(G_1)$，有

$$(5\cdot3)\qquad \iint_{G_1}\Big[(Tf_1Tg_1)\varphi_{\bar z}+(f_1Tg_1+g_1Tf_1)\varphi\Big]d\sigma_z=0.$$

设 $f_n\in D_\infty^0(G_1)$ 且当 $n\to\infty$ 时，$L_p(f_n-f,\ \bar{G}_1)\to0$。由于 $Tf_n\in C^1(G_1)$，所以根据 (5·2) 式可知

$$(5\cdot4)\qquad \iint_{G_1}(Tf_nTg_1)\varphi_{\bar z}+(f_nTg_1+g_1Tf_n)\varphi]d\sigma_z=0$$

$$(n=2,3,4\cdots).$$

因为 $f_1\in L_p(G)$，$g_1\in L_q(G)$，由(4·22)可知 $Tf_1\in L_{\frac{q}{q-1}}(G)$，$Tg_1\in L_{\frac{p}{p-1}}(G)$。另外，还知道 $\frac{p-1}{p}+\frac{q-1}{q}=2-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{2}<1$，则 $Tf_1Tg_1\in L_2(\bar{G}_1)$，而由 $\frac{1}{p}+\frac{p-1}{p}=1$，则 $f_1Tg_1\in L_1(\bar{G}_1)$，以及 $\frac{1}{q}+\frac{q-1}{q}=1$，则 $g_1Tf_1\in L_1(\bar{G}_1)$。再利用（4·22）式

$$L_\gamma(T_{G_1}(f_n-f_1),\bar{G}_1)\leqslant M(p,\gamma,G)L_p(f_n-f_1,\ \bar{G}_1),$$

$$\gamma=\frac{q}{q-1},$$

从而由 $L_p(f_n-f_1,\bar{G}_1)\to 0$（当 $n\to\infty$）可以推出 Tf_n 平均收敛于 Tf_1，因而也得知 f_n 与 Tf_n 分别弱收敛于 f_1 与 Tf_1，所以对(5·4)式取极限就可得到（5·3）式。

定理 5·2 假设

1） $g=f_{\bar{z}}\in L_2(G)$；

2） $z=w(\zeta)$ 将 ζ 平面上的区域 G' 双方单值且连续地映射到 z 平面上的区域 G；

3） $w(\zeta)\in C^1(G')$，在 G' 内 $J=|w_\zeta|^2-|w_{\bar{\zeta}}|^2\neq 0$。

则复合函数 $f(w(\zeta))\in D_{\bar{\zeta}}(G')$，并且

$$(5.5)\qquad \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}f(w(\zeta))=\frac{\partial f(z)}{\partial z}\frac{\partial w(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}+\frac{\partial f(z)}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\overline{w(\zeta)}}{\partial\bar{\zeta}};$$

$$(5.6)\qquad \frac{\partial}{\partial\zeta}f(w(\zeta))=\frac{\partial f(z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial w(\zeta)}{\partial\zeta}+\frac{\partial f(z)}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\overline{w(\zeta)}}{\partial\zeta},$$

证 我们只要证明(5.5)式成立即可。

首先，$g=f_{\bar{z}}\in L_2(G)$，根据定理 4·4 可知 $f_z\in L_2(G)$，其次，由定理 2·6 知道，在 G 的任一子域 G_1 内

$$f = \Phi + T_{G_1} g, \quad \Phi \in \mathfrak{A}(G_1), \quad g = f_{\bar{z}}.$$

应当指出：若 $f \in C^1(G)$，则（5•5）式成立．故 $\Phi(w(\zeta))$ 满足(5•5）式，于是只需证明 $T_{G_1}g$ 也适合（5•5）式．

设 $g_n \in D^0_\infty(G)$ 且当 $n \to \infty$ 时，$L_2(g_n - g, G) \to 0$，则 $f_n(w(\zeta))$满足（5•5）式，并且还能推出 f_n 与 Πg_n 分别平均收敛于 f 与 Πg，因而它们也弱收敛于 f 与 Πg，其中 $f_n = T g_n$．又因为 $J = |w_\zeta|^2 - |w_{\bar{\zeta}}|^2 \neq 0$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{G'} \Big[f_n(w(\zeta)) - f(w(\zeta)) \Big] J d\sigma_\zeta$$

$$= \lim_{n\to\infty} \iint_{G} \Big[f_n(z) - f(z) \Big] d\sigma_z = 0.$$

这表明 $f_n(w(\zeta))$ 弱收敛于 $f(w(\zeta))$．所以，对于任意的 $\varphi \in D^0_1(G')$，有

$$\iint_{G'} f(w(\zeta)) \varphi_{\bar{\zeta}} d\sigma_\zeta$$

$$= \lim_{n\to\infty} \iint_{G'} f_n(w(\zeta)) \varphi_{\bar{\zeta}} d\sigma_\zeta$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \iint_{G'} \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} f_n(w)(\zeta) d\sigma_\zeta$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \iint_{G'} \varphi(\zeta) \left[\frac{\partial f_n(z)}{\partial z} \frac{\partial w(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial f_n(z)}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \overline{w(\zeta)}}{\partial \bar{\zeta}} \right] d\sigma_\zeta$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \iint_{G'} \varphi(\zeta) \Big[\Pi g_n \cdot w_{\bar{\zeta}} + g_n \bar{w}_{\bar{\zeta}} \Big] d\sigma_\zeta$$

$$= -\iint_{G'} \varphi(\zeta) \Big[\Pi g \cdot w_{\bar{\zeta}} + g \cdot \bar{w}_{\bar{\zeta}} \Big] d\sigma_\zeta,$$

因此有

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} f(w(\zeta)) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial w(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \overline{w(\zeta)}}{\partial \bar{\zeta}}.$$

定理 5·3 假设

1) $z_* = f(z) \in D_{\bar{z}}(G)$，$f(G) \subset G_*$（有界域），并且 $g = f_{\bar{z}} \in L_p(G)$，$p > 2$；

2) $\Phi(z_*)$ 在域 G_*° 内解析，$\bar{G}_* \subset G_*^\circ$.

则复合函数 $\Phi[f(z)] = f_*(z) \in D_{\bar{z}}(G)$，并且

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_*(z) = \Phi'(f(z)) \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}, \tag{5·7}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f_*(z) = \Phi'(f(z)) \frac{\partial f(z)}{\partial z}. \tag{5·8}$$

证 设 G_1 为 G 内的任一子域，由定理 2·6 可知

$$f(z) = \Phi^* + T_{G_1} g, \quad g = f_{\bar{z}}, \quad \Phi^* \in \mathfrak{A}_0(G_1).$$

设 $g_n \in D_\infty^\circ(G_1)$ 且当 $n \to \infty$ 时，$L_p(g_n - g, \bar{G}_1) \to 0$，再由定理 3·1 可知 $f_n = \Phi^* + T_{G_1} g_n$ 在 $\bar{G}_1$ 上一致收敛于 $f = \Phi^* + T_{G_1} g$，于是 $\Phi(f_n(z))$ 与 $\Phi'[f_n(z)]$在 G_1 内分别一致收敛于 $\Phi(f(z))$ 与 $\Phi'(f(z))$，从而对任意 $\varphi(z) \in D_1^\circ(G_1)$，则有

$$\iint_{G_1} \Phi[f(z)] \varphi_{\bar{z}} d\sigma_z$$

$$= \lim_{n \to \infty} \iint_{G_1} \Phi[f_n(z)] \varphi_{\bar{z}} d\sigma_z$$

$$= -\lim_{n \to \infty} \iint_{G_1} \varphi(z) \Phi'[f_n(z)] f_{n\bar{z}} d\sigma_z$$

$$= -\lim_{n \to \infty} \iint_{G_1} \varphi(z) \Phi'[f_n(z)] g_n(z) d\sigma_z$$

$$= -\iint_{G_1} \varphi(z)\Phi'[f(z)]g(z)\,d\sigma_z.$$

由此可知

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_*(z) = \Phi'[f(z)]\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}.$$

这就证明了公式(5·7)，类似地也可以证明 (5·8)。

第二章　拟共形映射

所谓拟共形映射是指较一般的一阶椭圆型复方程的单叶解或同胚解·本章中，我们先讨论 Beltrami 复方程在区域上单叶解的存在性及其它性质，使用这些结果，可以将一般的一阶和二阶一致椭圆型方程组与方程化为标准型复方程(见书[128]31)，并可用来证明较一般的一阶椭圆型复方程的 Riemann 变换定理，这也称为拟共形映射的基本定理。

§ 1　Beltrami 方程的基本同胚

我们讨论 Beltrami 复方程

$$w_{\bar z} - q(z) w_z = 0, \tag{1.1}$$

其中

$$\delta(z) = \frac{a - \sqrt{\Delta} + ib}{a + \sqrt{\Delta} - ib},$$

并设 (1.1) 满足一致椭圆型条件，即

1) $a(x, y)$、$b(x, y)$、$c(x, y)$ 是在全平面 E 上的有界可测函数；

2) 在 E 上几乎处处有 $\Delta = ac - b^2 \geqslant \Delta_0 > 0$, $a > 0$ (Δ_0 = 常数).

由条件 2) 可以导出

$$|q(z)| = \frac{\sqrt{(a - \sqrt{\Delta})^2 + b^2}}{\sqrt{(a + \sqrt{\Delta})^2 + b^2}} \leqslant q_0 < 1, \ q_0 = \text{常数}.$$

方程 (1.1) 是 Cauchy-Riemann 方程的推广，它是以下实的

Beltrami 方程组的复形式。

$$(1.2)\qquad \begin{cases}\sqrt{\Delta}\,u_x - av_y + bv_x = 0,\\ \sqrt{\Delta}\,u_y - bv_y + cv_x = 0.\end{cases}$$

方程组（1.2）的单叶解也称为这一方程组的**同胚解**或**拟共形映射**.

以下我们所讲的方程（1.1）于区域 G 内的解 $w(z)$ 均指**正则解**，即 $w(z)\in D_{1,\,p}(G)$，$p>2$，且几乎处处满足（1.1）。

定理 1.1 若 $q(z)$ 是在全平面 E 上的有界可测函数，且 $|q(z)|\leqslant q_0<1$，$q(z)\in L_{p'}(E)$，$1<p'<2$。则方程（1.1）有形如下的解

$$(1.3)\qquad w(z)=z+Tf,\quad f=f(z)\in L_p(E),\quad p\geqslant p'.$$

证 首先由不等式 $|q(z)|^p\leqslant|q(z)|^{p'}$，$p\geqslant p'$ 可以导出 $q(z)\in L_p(E)$。其次将

$$w_z=1+(Tf)_z=1+\Pi f,\quad w_{\bar z}=(Tf)_{\bar z}=f,\quad f\in L_p$$

代入（1.1）可得

$$(1.4)\qquad f=q+q\Pi f\equiv Af.$$

再对映射 A 使用压缩映象原理，由于

$$L_p(Af_1-Af_2,\ E)\leqslant L_p(q\Pi(f_1-f_2),\ E)$$
$$\leqslant q_0L_p(\Pi(f_1-f_2),\ E)\leqslant q_0\Lambda_pL_p(f_1-f_2,\ E),$$

其中 $\Lambda_p=L_p(\Pi)$。根据第一章定理 4.2，$\log\Lambda_p$ 是 $\frac{1}{p}$ 的凸函数，$\Lambda_2=1$，又知 $q_0<1$，故存在 $\varepsilon>0$，使得当 $|p-2|\leqslant\varepsilon$ 时有 $q_0\Lambda_p<1$。于是从压缩映象原理可知：（1.4）的齐次积分方程 $f-q\Pi f=0$ 仅有零解，而非齐次积分方程（1.4）有唯一解 $f\in L_p(E)$。因此（1.3）是（1.1）的解。若取上面的 $p>2$，则由第一章定理 3.3 可得，$w(z)-z=Tf\in C_\alpha(E)$，$\alpha=\frac{p-2}{p}$。在后面 §3 中，将证明(1.1) 形如（1.3）的解 $w(z)$ 是全平面 E 上

的同胚解，称为**基本同胚**.

下面我们用逐次逼近法来求方程（1.1）的解.

任取 $f_0(z)=g(z)\in L_p(E)$，将它代入到（1.4）式的 Πf 里的 f 中去，得到 $f_1=q\Pi f_0+q$. 再对 f_1 继续上述做法得出 $f_2=q\Pi f_1+q$. 一般地，可得 $f_n=q\Pi f_{n-1}+q$，$n=1,2,\cdots\cdots$. 由此 $f_{n+1}-f_n=q\Pi(f_n-f_{n-1})$. 从而

$$
\begin{aligned}
&L_p(f_{n+e}-f_n,\ E)\leqslant L_p(q\Pi(f_n-f_{n-1}),\ E)\\
&\leqslant q_0L_p(\Pi(f_n-f_{n-1}),\ E)\leqslant q_0\Lambda_pL_p(f_n-f_{n-1},\ E)\\
&\leqslant(q_0\Lambda_p)^2L_p(f_{n-1}-f_{n-2},\ E)\leqslant\cdots\cdots\\
&\leqslant(q_0\Lambda_p)^nL_p(f_1-f_0,\ E).
\end{aligned}
$$

于是

$$
L_p(f_{n+l}-f_n,E)\leqslant\sum_{j=1}^{l}(q_0\Lambda_p)^{n-1+j}L_p(f_1-f_0,\ E)
$$

$$
\leqslant\frac{(q_0\Lambda_p)^{n-1}}{1-q_0\Lambda_p}L_p(f_1-f_0,\ E),
$$

因为 $0\leqslant q_0\Lambda_p<1$，所以当 n、$m\to\infty$ 时，$L_p(f_m-f_n,\ E)\to0$. 由 $L_p(E)$ 的完备性可知，存在 $f\in L_p(E)$ 使得 $L_p(f_n-f,\ E)\to0$ $(n\to\infty)$. 令 $f_n=q\Pi f_{n-1}+q$ 中的 $n\to\infty$，可得 $f=q\Pi f+q$. 特别地，若取 $f_0=g\equiv0$，则有 $f_1=q$. $f_2=q\Pi q+q$. 一般地 $f=q+q\Pi f+q\Pi(q\Pi q)+\cdots$.

这个方法使我们容易求出 f 的近似函数，使其具有预先给定的任何高的精确度.

§2 局部同胚的存在性

设 $w(z)$ 是方程（1.1）在点 z_0 的某一邻域 $\triangle$ 内的解，并且

$w(z)$ 实现从△到 $w_0=w(z_0)$ 的某一邻域的同胚映射，则称 $w(z)$ 是（1.1）在△内的**局部同胚**。

我们先证明局部同胚的存在性。

定理 2.1 假设 G 为有穷点 z_0 的某一个邻域，若 $q(z)\in C_\alpha(\bar{G})$，$0<\alpha<1$，则在点 z_0 的某一个小邻域 $G_0'(G_0'\subset G)$，存在方程（1.1）的局部同胚 $w_0(z)\in C_\alpha^1(\bar{G}_0')$。

证 我们分以下几个步骤来证明定理：

1）进行自变量的变换。作非异仿射变换 $\zeta=z-z_0+q(z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)$，因此

$$z-z_0=\frac{\zeta-q(z_0)\bar{\zeta}}{1-|q(z_0)|^2},$$

所以 $z=z_0$ 对应于 $\zeta=0$。经过上述变换，复方程（1.1）变为

$$w_{\bar{\zeta}}-\rho(\zeta)w_\zeta=0, \tag{2.1}$$

其中

$$\rho(\zeta)=\frac{q(z)-q(z_0)}{1-q(z)\overline{q(z_0)}}.$$

2）建立关于 $\rho(\zeta)$ 的两个不等式。由 $|q(z)|\leqslant q_0<1$，可推得 $|\rho(\zeta)|\leqslant q_0'<1$，这里 q_0' 为常数。

又因 $\rho(0)=0$，则知存在一个闭圆 $G_\delta:|\zeta|\leqslant\delta$，在其上

$$\begin{aligned}
&|\rho(\zeta_1)-\rho(\zeta_2)|\\
&=\left|\frac{(q(z_1)-q(z_2))(1-|q(z_0)|)^2}{(1-q(z_1)\overline{q(z_0)})(1-q(z_2)\overline{q(z_0)})}\right|\\
&\leqslant\frac{|q(z_1)-q(z_2)|}{(1-q_0)^2}\leqslant\frac{H(q,\ \alpha,\ \bar{G})|z_1-z_2|^\alpha}{(1-q_0)^2}\\
&\leqslant\frac{H(q,\ \alpha,\ \bar{G})}{(1-q_0)^2}\left|\frac{\zeta_1-\zeta_2-q(z_0)(\bar{\zeta}_1-\bar{\zeta}_2)}{1-|q(z_0)|^2}\right|^\alpha\\
&\leqslant\frac{H(q,\ \alpha,\ \bar{G})}{(1-q_0)^3}|\zeta_1-\zeta_2|^\alpha.
\end{aligned}$$

即在 G_δ 有

$$(2.2) \qquad |\rho(\zeta_1)-\rho(\zeta_2)| \leqslant M|\zeta_1-\zeta_2|^\alpha,$$

其中

$$M=\frac{H(q,\ \alpha,\ \bar{G})}{(1-q_0)^3},$$

并且 $|\rho(\zeta)| \leqslant M|\zeta|^\alpha$.

现在考虑函数

$$\rho_\delta(\zeta)=\begin{cases}\rho(\zeta), & |\zeta|<\frac{1}{2}\delta,\\ 2\rho(\zeta)\left(1-\frac{|\zeta|}{\delta}\right), & \frac{1}{2}\delta \leqslant |\zeta| \leqslant \delta,\\ 0, & |\zeta|>\delta.\end{cases}$$

显见，$\rho_\delta(\zeta) \in C_\alpha(E)$ 并且在 G_δ 的外面为零. 由 (2.2) 式及 $\rho_\delta(\zeta)$ 的定义易得

$$|\rho_\delta(\zeta)| \leqslant M|\zeta|^\alpha \leqslant M\delta^\alpha.$$

当 $|\zeta_i| \geqslant \delta$ 或者 $|\zeta_i|<\frac{\delta}{2}$，$i=1, 2$ 时，对于 $\rho_\delta(\zeta)$ 显然也有 (2.2) 式. 现在假设 $\frac{1}{2}\delta \leqslant |\zeta_i| \leqslant \delta$，$i=1, 2$，我们有

$$\begin{aligned}|\rho_\delta(\zeta_1)-\rho_\delta(\zeta_2)| &\leqslant 2\left(1-\frac{|\zeta_1|}{\delta}\right)|\rho(\zeta_1)-\rho(\zeta_2)|+\\ &\quad 2|\rho(\zeta_2)|\left|\frac{|\zeta_1|-|\zeta_2|}{\delta}\right|\\ &\leqslant M|\zeta_1-\zeta_2|^\alpha+2M\delta^\alpha\frac{|\zeta_1-\zeta_2|}{\delta}\\ &\leqslant 3M|\zeta_1-\zeta_2|^\alpha.\end{aligned}$$

于是当 $\zeta_i \in G_\delta$，$i=1, 2$ 时，

$$|\rho_\delta(\zeta_1)-\rho_\delta(\zeta_2)| \leqslant 5M|\zeta_1-\zeta_2|^\alpha.$$

不妨假设 $\delta\leqslant 1$，则有

$$(2.3)\qquad C_\alpha(\rho_\delta,\ G_\delta)\leqslant M\delta^\alpha+5M\leqslant 6M.$$

3）引入积分方程．我们把在 G_δ 外为零的 $C_\alpha(E)$ 中元素的全体记作 $C_\alpha^\cdot(G_\delta)$．显然，$C_\alpha^\cdot(G_\delta)$ 是 Banach 空间．

求方程（2.1）形如下的解

$$(2.4)\qquad w(\zeta)=\zeta+Tf=\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{G_\delta}\frac{f(z)d\sigma_z}{z-\zeta},\quad f(\zeta)\in C_\alpha^0(G_\delta).$$

因为

$$w_{\bar\zeta}=f(\zeta),\quad w_\zeta=1+\Pi f\equiv 1-\frac{1}{\pi}\iint_{G_\delta}\frac{f(z)d\sigma_z}{(z-\zeta)^2},$$

将它们代入（2.1），则得到 $f(\zeta)$ 所满足的积分方程

$$(2.5)\qquad f(\zeta)-\rho_\delta(\zeta)\Pi f=\rho_\delta(\zeta),\quad |\zeta|<\frac{\delta}{2},\quad \rho(\zeta)=\rho_\delta(\zeta).$$

以下再来求解（2.5）．

4）建立一些不等式．若 $f\in C_\alpha^\cdot(G_\delta)$，那么根据第一章（3.37）式有

$$g(z)\equiv\Pi f=\frac{-1}{\pi}\iint_E\frac{f(\zeta)d\sigma_\zeta}{(\zeta-z)^2}$$

$$=\frac{-1}{\pi}\iint_{G_\delta}\frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta,$$

由此，

$$(2.6)\qquad |g(z)|\leqslant\frac{1}{\pi}\iint_{G_\delta}\frac{H(f,\ \alpha,\ G_\delta)}{|\zeta-z|^{2-\alpha}}d\sigma_\zeta$$

$$\leqslant\frac{H(f,\ \alpha,\ G\delta)}{\pi}2\pi\int_0^{2\delta}r^{\alpha-1}dr$$

$$\leqslant\frac{4\delta^\alpha}{\alpha}H(f,\ \alpha,\ G_\delta).$$

再由第一章（3.39）式，有

$$\left| g(z_1) - g(z_2) \right| = \left| \frac{z_1 - z_2}{\pi} \iint\limits_{G_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z_2)}{(\zeta - z_2)^2(\zeta - z_1)} d\sigma_\zeta + \right.$$

$$+ \frac{z_1 - z_2}{\pi} \iint\limits_{G_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z_1)}{(\zeta - z_2)(\zeta - z_1)^2} d\sigma_\zeta +$$

$$\left. \left[f(z_2) - f(z_1) \right] \frac{\overline{z_1 - z_2}}{z_1 - z_2} \right| \leqslant M_\alpha |z_1 - z_2|^\alpha H(f, \alpha, G_\delta),$$

即

$$(2.7) \qquad H_\alpha(\Pi f, G) \leqslant M_\alpha H(f, \alpha, G_\delta).$$

综合不等式（2.6）、（2.7）可得

$$C_\alpha(\Pi f, G_\delta) \leqslant \left(M_\alpha + \frac{4\delta^\alpha}{\alpha} \right) H(f, \alpha, G_\delta) \leqslant \widetilde{M}_\alpha C_\alpha(f, G_\delta),$$

其中 $\widetilde{M}_\alpha = M_\alpha + \frac{4}{\alpha}$. 于是由第一章（1.6）式有

$$C_\alpha(\rho_\delta \Pi f, G_\delta) \leqslant C_\alpha(\rho_\delta, G_\delta) C(\Pi f, G_\delta) +$$

$$+ C(\rho_\delta, G_\delta) C_\alpha(\Pi f, G_\delta)$$

$$\leqslant \left(6M \cdot \frac{4\delta^\alpha}{\alpha} + M\delta^\alpha \cdot \widetilde{M}_\alpha \right) H(f, \alpha, G_\delta)$$

$$= M\delta^\alpha \left(\frac{24}{\alpha} + M_\alpha + \frac{4}{\alpha} \right) H(f, \alpha, G_\delta).$$

即

$$(2.8) \qquad C_\alpha(\rho_\delta \Pi f, G_\delta) \leqslant \widetilde{M}_\delta C_\alpha(f, G_\delta),$$

其中 $\widetilde{M}_\delta = M\delta^\alpha \left(M_\alpha + \frac{28}{\alpha} \right)$.

选取适当小的 δ，使得它满足不等式

$$\delta < 1 \qquad \text{和} \qquad \delta^\alpha < \frac{\alpha}{M(52 + M_\alpha)}.$$

这样，易得

$$\widetilde{M}_{\delta}<\frac{M(M_{\alpha}+52)}{\alpha}\delta^{\alpha}<1 \tag{2.9}$$

和

$$\frac{6M}{1-\widetilde{M}_{\delta}}<\frac{\alpha}{4\delta^{\alpha}}. \tag{2.10}$$

5）求方程的特解，并证明其同胚性。考虑算子$\Pi_{\delta}f\equiv\rho_{\delta}(\zeta)\Pi f$，$f\in C_{\alpha}^{1}(G_{\delta})$。它是$C_{\alpha}^{1}(G_{\delta})$中的有界线性算子，将$C_{\alpha}(G_{\delta})$变到自身。从（2.8）与（2.9），并由压缩映射原理可知，积分方程（2.5）有唯一解$f(\zeta)\in C_{\alpha}^{1}(G_{\delta})$。则由第一章定理3.7可知

$$w(\zeta)=\zeta+Tf\in C_{\alpha}^{1}(G_{\delta})$$

是（2.1）在$|\zeta|\leqslant\frac{\delta}{2}$上的解。

现在证明$w(\zeta)$是把$\zeta=0$的邻域变到$w(0)$的某一个邻域的同胚映射。

考虑 Jacobi 行列式，有

$$\begin{aligned}
J_{0}(\zeta)&=|w_{\zeta}|^{2}-|w_{\bar{\zeta}}|^{2}=(1-|\rho_{\delta}(\zeta)|^{2})|w_{\zeta}|^{2}\\
&=(1-|\rho_{\delta}|^{2})|1+\Pi f|^{2}\geqslant(1-|\rho_{\delta}|^{2})(1-|\Pi f|)^{2}\\
&\geqslant(1-q_{0}'^{2})\left(1-\frac{4\delta^{\alpha}}{\alpha}H(f,\ \alpha,\ G_{\delta})\right)\\
&\geqslant(1-q_{0}'^{2})\left(1-\frac{4\delta^{\alpha}}{\alpha}C_{\alpha}(f,\ G_{\delta})\right).
\end{aligned}$$

利用（2.3）、（2.5）与（2.8）可得

$$\begin{aligned}
C_{\alpha}(f,\ G_{\delta})&\leqslant C_{\alpha}(\rho_{\delta}\Pi f,\ G_{\delta})+C_{\alpha}(\rho_{\delta},\ G_{\delta})\\
&\leqslant\widetilde{M}_{\delta}C_{\alpha}(f,\ G_{\delta})+6M.
\end{aligned}$$

由此

$$C_\alpha(f,\ G_\delta) \leqslant \frac{6M}{1-\tilde{M}_{\delta'}} < \frac{\alpha}{4\delta^\alpha}.$$

故当 $|\zeta|\leqslant\delta$ 时，$J_0(\zeta)>0$。因此函数 $w(\zeta)=\zeta+Tf$ 实现从某一个圆 $|\zeta|\leqslant\delta_0<\delta$ 到 $w(0)$ 的某一个邻域的同胚映射。

6）求（1.1）的局部同胚。根据仿射变换回到变量 z，我们得到

$$w_0(z)=w[z-z_0+g(z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)].$$

显然，它是方程（1.1）的属于 $C^1_\alpha(G'_0)$ 类的解，其中 G'_0 是以 z_0 为中心椭圆盘。它是由圆盘 $|\zeta|\leqslant\delta_0$ 经过仿射变换而得到的。此外，$w_0(z)$ 把这个椭圆盘同胚地映射到 $w_0(z_0)$ 的某一个邻域。因此，$w_0(z)$ 是（1.1）在 z_0 的某一个邻域的局部同胚。

以下我们证明局部同胚的可微性。

定理 2.2 若 $q(z)\in C^m_\alpha(\bar{G})$，$z_0\in G$。则定理 2.1 中所得到的局部同胚 $w_0(z)\in C^{m+1}_\alpha(E)$，$0<\alpha<1$，确切地说 $W_0(z)=W(z-z_0+q(z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0))\in C^{m+1}_\alpha(E)$。

证 从定理 2.1 的证明知道，若能证明 $w(\zeta)=\zeta+Tf\in C^{m+}_\alpha(E)$ 即可。

同样，我们可以认为 $\rho_\delta(\zeta)\in C^m_\alpha(E)$，并且当 $|\zeta|\leqslant\frac{\delta}{2}$ 时 $\rho_\delta(\zeta)=\rho(\zeta)$，又在圆 $|\zeta|\leqslant\delta$ 之外 $\rho_\delta\equiv0$。我们将对 $m=1$ 的情况给出证明。一般情况可类似地证明。

现在假设 $\rho_\delta\in C^1_\alpha(E)$，$0<\alpha<1$。考察 $C_\alpha(E)$ 中的线性方程

(2.11) $$g-\rho_\delta\Pi g-(\rho_\delta)_{\bar{z}}Tg=(\rho_\delta)_z.$$

它的系数 ρ_δ、$(\rho_\delta)_z$ 均属于 $C_\alpha(E)$。因为 $|\rho_\delta|\leqslant q'_0<1$，所以 $(I-\rho_\delta\Pi)$，有逆算子。于是方程（2.11）可转化为如下的非齐次积分方程

(2.12) $$g-[(I-\rho_\delta\Pi)^{-1}(\rho_\delta)_{\bar{z}}]Tg=[(I-\rho_\delta\Pi)^{-1}(\rho_\delta)_z],$$

其中 $[(I-\rho_\delta\Pi)^{-1}(\rho_\delta)_{\bar{z}}]\in C_\alpha(E)$。因为 T 是全连续算子，而

$(I-\rho_\delta\Pi)^{-1}$是线性的，所以 $(I-\rho_\delta\Pi)^{-1}\cdot(\rho_\delta)_zTg$ 在 $C_\alpha(E)$ 也是全连续的。我们要证明方程 (2.12) 在 $C_\alpha(E)$ 中总有解，设 g_0 是对应齐次积分方程的解，这个方程等价于奇异齐次方程

(2.13) $\qquad g_0-\rho_\delta\Pi g_0-(\rho_\delta)_zTg_0=0,\ \ g_0\in C_\alpha(E).$

因为在点 ∞ 的邻域内 $\rho_\delta=0$，所以 g_0 在 ∞ 点的邻域为零。引进函数

$$Tg_0=\frac{-1}{\pi}\iint_E\frac{g_0(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta,$$

利用第一章 (3.45)、(3.47) 式，可得

$$(Tg_0)_z=g_0,\quad \rho_\delta\Pi g_0+(\rho_\delta)_zTg_0=(\rho_\delta\Pi Tg_0)_z.$$

于是 (2.13) 可写成

$$(Tg_0-\rho_\delta\Pi Tg_0)_z=0.$$

即 $Tg_0-\rho_\delta\Pi Tg_0=\overline{\Phi_0(z)}$，其中 $\Phi_0(z)$ 是整函数。但是 $Tg_0-\rho_\delta\Pi Tg_0$ 在 ∞ 点为零，所以 $\Phi(z)\equiv0$。即

$$(I-\rho_\delta\Pi)(Tg_0)\equiv0.$$

又 $(I-\rho_\delta\Pi)$ 可逆，知 $Tg_0\equiv0$，于是 $g_0=(Tg_0)_z\equiv0$。根据积分方程理论（见[67]），知 (2.12)、(2、11) 有属于 $C_\alpha(E)$ $(0<\alpha<1)$ 的解 g。再从 (2.11)，知 g 在 ∞ 点为零，由第一章 (3.45)、(3.47)，(2.11)可以写成

$$[Tg-\rho_\delta\Pi Tg-\rho_\delta]_z=0.$$

因之 $Tg-\rho_\delta\Pi Tg=\rho_\delta$。这就是说方程 (2.5) 有形如 $f=Tg$ 的解。因为 $g\in C_\alpha(E)$，于是 $f\in C_\alpha^1(E)$。因此 $Tf\in C_\alpha^2(E)$。

完全类似地可证：

定理 2.3 若 $q(z)\in D_{m,p}(G_0)$，$m\geqslant1$，$p>2$，其中 G_0 是 z_0 点的某一个邻域。则定理 2.2 中所建立的局部同胚 $w_0(z)\in D_{m+1,p}(E)$。

定理 2.4 设 $q(Z)\in C_\alpha^m(G)$，$z_0\in G$，$0<\alpha<1$，$m\geqslant0$，z_0点

的邻域 $G_0 \subset G$，并且 $w_0(z)$ 是（1.1）关于邻域 G_0 的同胚解，则（1.1）在 G_0 的任一个正则解均可表为

$$w(z)=\Phi[w_0(z)]\in C_\alpha^{m+1}(G_0), \tag{2.14}$$

此处 $\Phi(w)$ 是区域 $w_0(G_0)$ 上的任意解析函数。

证 首先验证（2.14）中的函数 $w(z)$ 是（1.1）的解。由定理 2.2 知，$w_0(z)\in C_\alpha^{m+1}(E)$，所以 $\Phi[w_0(z)]\in C_\alpha^{m+1}(G_0)$。而 $w_{\bar z}=\Phi' w_{0\bar z}=\Phi' q w_{0z}=qw_z$，即（2.14）中的函数 $w(z)$是(1.1)的解。

其次证明（1.1）的任一个正则解 $w(z)$ 均可表为（2.14）的形式。以 $z=z(w_0)$ 来表示函数 $w_0=w_0(z)$ 的反函数，作函数则 $\Phi(w_0)=w[z(w_0)]$，则 $w(z)=\Phi(w_0)=\Phi[w_0(z)]$。现在要证 $\Phi(w_0)$ 在 $w_0(G_0)$ 解析。事实上，由于

$$[\Phi(w_0)]_{\bar w_0}=w_z z_{\bar w_0}+w_{\bar z}\bar z_{\bar w_0}=w_z(z_{\bar w_0}+g\bar z_{\bar w_0}),$$

$$1=(w_0)_{w_0}=\{w_0[z(w_0)]\}_{w_0}=w_{0z}z_{w_0}+w_{0\bar z}\bar z_{w_0}$$

$$=w_{0z}(z_{w_0}+q\bar z_{w_0}),$$

所以 $w_{0z}\neq 0$，然而

$$0=(w_0)_{\bar w_0}=w_{0z}z_{\bar w_0}+w_{0\bar z}\bar z_{\bar w_0}=w_{0z}(z_{\bar w_0}+q\bar z_{\bar w_0}),$$

可推得 $z_{\bar w_0}+q\bar z_{\bar w_0}=0$。于是$[\Phi(w_0)]_{\bar w_0}=0$。故 $\Phi(w_0)$ 是 $w_0(G_0)$ 内的解析函数。

应用定理 2.3 和公式（2.14），可得：

定理 2.5 若 $q(z)\in D_{m,p}(G_0)$，$m\geqslant 1$，$p>2$。则方程(1.1)的任一个正则解 $w(z)\in D_{m+1,p}(G_0)$。

定理 2.6 若 $q(z)\in C_\alpha(G)$，$0<\alpha<1$，$z_0\in G$。则方程（1.1）的非常数解的零点在 G 内是孤立的。设 $w(z_0)=0$，那么在 z_0 的某邻域 G_0 内

$$w(z)=[(z-z_0)+q(z_0)(\bar z-\bar z_0)]^n\tilde w(z), \tag{2.15}$$

其中 $n>0$，$\tilde w(z)$ 在 G_0 内恒不为零并且 Hölder 连续。

证 由（2.15）式立即可知 $w(z)$ 零点的孤立性。所以只要

证（2.15）式成立即可. 利用（2.14）式，由于 $w_0=w_0(z_0)$, $\Phi(w_0)=0$，所以

$$w(z)=\Phi[w_0(z)]=[w-w_0]^n\Phi_0(w)$$
$$=[w_0(z)-w_0(z_0)]^n\Phi_0(w_0(z)),$$

此处 $\Phi_0[w]$ 解析并且 $\Phi_0[w_0]\neq 0$. 但是 $w_0(z)=w(\zeta)=\zeta+Tf$, 因此

$$w_0(z)-w_0(z_0)=w(\zeta)-w(0)=\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{G_\delta}\frac{\zeta f(\zeta')}{(\zeta'-\zeta)\zeta'}d\sigma_{\zeta'}$$

$$=\zeta w_*(\zeta),$$

其中

$$w_*(\zeta)=1-\frac{1}{\pi}\iint_{G_\delta}\frac{f(\zeta')d\sigma_\delta'}{(\zeta'-\zeta)\zeta'},$$

$$\zeta=z-z_0+q(z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0).$$

由于 $|f(\zeta)|\leqslant C_\alpha(f,\ G_\delta)|\zeta|^\alpha$，因此，当 $2<p<\frac{2}{1-\alpha}$ 时，有

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|^p\leqslant\frac{[C_\alpha(f,\ C_\delta)]^p}{|\zeta|^{(1-\alpha)p}}.$$

所以 $\frac{f(\zeta)}{\zeta}\in L_p(E)$. 根据第一章定理 3.1，有 $w_*(\zeta)\in C_\beta(E)$, $\beta=\frac{p-2}{p}$. 现在来证明 $w_*(0)\neq 0$. 事实上，从 $C_\alpha(f,\ G_\delta)<\frac{\alpha}{4\delta^\alpha}$，可知

$$|w_*(0)|\geqslant 1-\frac{1}{\pi}\iint_{G_\delta}\frac{|f(\zeta')|}{|\zeta'|^2}d\sigma_{\zeta'}$$

$$\geqslant 1-\frac{C_\alpha(f,\ G_\delta)}{\pi}\iint_{G_\delta}\frac{d\sigma_{\zeta'}}{|\zeta'|^{2-\alpha}}$$

$$\geq 1-\frac{2C_\alpha(f,\ G_\delta)\delta^\alpha}{\alpha}>\frac{1}{2}>0.$$

于是 $w_*[(z-z_0)+q(z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)]=w_*(\zeta)$ 在 $z=z_0$ 的某个邻域 G_0 恒不等于零，从而

$$\begin{aligned}w(z)&=\zeta^n[w_*(\zeta)]^n\Phi_0[w_0(z)]\\&=[(z-z_0)+q(z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)]^n\{w_*[(z-z_0)\\&\quad+q(z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)]\}^n\Phi[w_0(t)]\\&\equiv[(z-z_0)+q(z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)]^n\tilde{w}(z),\end{aligned}$$

这里 $\tilde{w}(z)\neq 0$，$z\in G_0$，并且 Hölder 连续。

利用（2.15）式易得以下定理：

定理 2.7 设 $q(z)\in C_\alpha(G)$，$0<\alpha<1$，$z_0\in G$. $w(z)$ 是（1.1）在 z_0 的某邻域 G_0 的解，则当 z 沿半射线 $\varphi=\arg(z-z_0)=\mathrm{const}$ 趋于 z_0 时，

$$\frac{w(z)-w(z_0)}{z-z_0}\to A_0(1+q(z_0)e^{-2i\varphi}),\tag{2.16}$$

其中 A_0 是与 φ 无关的常数。

从（2.16）式可知，Beltrami 方程的解在 z_0 点有关于 z 的微商的充要条件是 $q(z_0)=0$。

定理 2.8（辐角原理） 设 $q(z)\in C_\alpha(G)$，$0<\alpha<1$. 若 $w(z)$ 是 Beltrami 方程的解，并且满足：1) $w(z)$ 在 $G+\Gamma$ 上连续，Γ 为 G 的边界，2) $w(z)|_\Gamma\neq 0$. 则 $w(z)$ 在 G 内只有有限个零点，其零点总个数 N 由公式

$$N=\frac{1}{2\pi}\triangle_\Gamma\arg w(z)\tag{2.17}$$

给出。而且每个零点有多少重就算多少次。

证 从定理 2.6 及上述条件 2) 得知，$w(z)$ 在 $G+\Gamma$ 上只有有限个零点，以 $z_1,\cdots,z_N$ 表示 $w(z)$ 在 G 的零点（n 重零点，排上 n 次）.利用（2.15）可得

$$w(t)=w_0(z)\prod_{k=1}^{N}[(z-z_k)+q(z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k)],$$

其中 $w_0(z)$ 在 $G+\Gamma$ 上连续并且恒不等于零，故

$$\frac{1}{2\pi}\triangle_\Gamma \arg w_0(z)=0.$$

又由于 $|q|<1$，所以

$$\frac{1}{2\pi}\triangle_\Gamma \arg[(z-z_k)+q(z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\triangle_\Gamma \arg\left[(z-z_k)\left(1+q(z_k)\frac{\bar{z}-\bar{z}_k}{z-z_k}\right)\right]=1.$$

从而 $N=\frac{1}{2\pi}\triangle_\Gamma \arg w(z)$.

定理 2.9 设 $q(z)\in C_\alpha(G)$，$0<\alpha<1$，并且 Beltrami 方程的解 $w(z)$ 把 $z_0\in G$ 的某一邻域双方单值地映射到点 $w_0=w(z_0)$ 的邻域，则对应的变换行列式在 z_0 点不为零，

(2.18) $$J=|w_z|^2-|w_{\bar{z}}|^2>0.$$

证 由定理 2.4，有 $w(z)=\Phi(w_0(z))$，所以 $J=|\Phi'|^2[|w_{0z}|^2-|w_{0\bar{z}}|^2]$. 而

$$w_{0z}=w_{0\zeta}+w_{0\bar{\zeta}}\overline{q(z_0)},$$

$$w_{0\bar{z}}=w_{0\zeta}q(z_0)+w_{0\bar{\zeta}}.$$

所以

$$|w_{0z}|^2-w_{0\bar{z}}|^2=(1-|q(z_0)|^2)(|w_{0\zeta}|^2-|w_{0\bar{\zeta}}|^2)$$
$$=(1-|q(z_0)|^2)J_0(\zeta)>0.$$

又因 $w_0(z)$ 和 $w(t)$ 均为同胚映射，故 $\Phi(w)$ 为单叶解析函数，则 $\Phi'\neq 0$. 因此有

$$J=|w_z|^2-|w_{\bar{z}}|^2>0.$$

§3 完全同胚的存在性

设 $w(z)$ 是方程 (1.1) 在全平面 E 上的解，并且 $w(z)$ 实现从 E 到整个 w 平面的同胚映射. 则称 $w(z)$ 是 (1.1) 的**完全同胚.**

定理 3.1 设 $q(z)\in L_{p'}C_{\alpha}^{m}(E)$, $m\geqslant 0$, $p'<2$, $0<\alpha<1$, $|q(z)|\leqslant q_0<1$, 则方程 (1.1) 的解 $w(z)=z+T_Ef$ 是 (1.1) 的完全同胚, 并且 $w(z)-z\in C_{\alpha}^{m+1}(E)$.

证 因为 $|q(z)|\leqslant q_0<1$, $q(z)\in L_{p'}(E)$, $p'<2$. 选取充分小的 ε 使得当 $|p-2|\leqslant\varepsilon$ 时, $p>2$, 从定理 1.1 便知 $f(z)\in L_p(E)$. 注意到 $f=0$, 当 $z\bar{\in}G$, 又 $T_Ef=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta+z)}{\zeta}d\sigma_\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|>1}\frac{f(\zeta+z)}{\zeta}d\sigma_\zeta$, 则有

$$|T_Ef|\leqslant\frac{1}{\pi}\Big(\iint\limits_{|\zeta|<1}|f(\zeta+z)|^p d\sigma_\zeta\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\iint\limits_{|\zeta|<1}|\zeta|^{-q}d\sigma_\zeta\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{1}{\pi}\Big(\iint\limits_{|\zeta|>1}|f(\zeta+z)|^{p'}d\sigma_\zeta\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\iint\limits_{|\zeta|>1}|\zeta|^{-q'}d\sigma_\zeta\Big)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\Big(\frac{2\pi}{2-q}\Big)^{\frac{1}{q}}L_p(f,\ E)+\frac{1}{\pi}\Big(\frac{2\pi}{q'-2}\Big)^{\frac{1}{q'}}L_{p'}(f,\ E)$$

$\leqslant M(p,\ p')L_pL_{p'}(f,\ E)$, 其中 $q=\frac{p}{p-1}<2$, $q'=\frac{p'}{q'-1}>2$,

$M(p,\ p')=\frac{1}{\pi}\Big(\frac{2\pi}{2-q}\Big)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{\pi}\Big(\frac{2\pi}{q'-2}\Big)^{\frac{1}{q'}}$. 故 $|T_Ef|\leqslant O(1)$, 所以在无穷远点附近有

$$w(z)=z\left[1+\frac{1}{z}T_E f\right]=z[1+O(z^{-1})].$$

又因为 $q(z)\in C_\alpha^m(E)$，从定理 2.2 知，在平面上任一点的邻域 $w(z)\in C_\alpha^{m+1}$，因此 $w(z)-z\in C_\alpha^{m+1}(E)$。

现在证明对于每个固定值 w_0，$w(z)$ 可以取到一次并且只取一次。事实上，$w_*(z)=w(z)-w_0$ 也是 (1.1) 的解，并且在 $z=\infty$ 附近有 $w_*(z)=z[1+O(z^{-1})]$，因此 $w_*(z)$ 不恒等于常数，以 Γ 表示充分大的圆周。由定理 2.8，可知

$$\frac{1}{2\pi}\triangle_\Gamma\arg w_*(z)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\triangle_\Gamma\arg z+\frac{1}{2\pi}\triangle_\Gamma\arg[1+O(z^{-1})]=1.$$

故存在一点并且只有一点 z_0 使得 $w_*(z_0)=0$，即 $w(z_0)=w_0$，因此 $w(z)$ 为 (1.1) 的完全同胚，并且 $w(\infty)=\infty$。

使用定理 2.4 易得

定理 3.2 假设 $q(z)\in L_{p'}C_\alpha(E)$，$0<\alpha<1$，$p'<2$，$|q(z)|\leqslant q_0<1$，则在某一个区域 G 内，(1.1) 的所有解均可表为如下形式

$$w(z)=\Phi[x(z)], \tag{3.1}$$

其中 $\Phi(\zeta)$ 在区域 $G_\zeta=x(G)$ 内解析，$x(z)$ 为 (1.1) 的完全同胚。

定理 3.3 设 $|q(z)|\leqslant q_0<1$，$q(z)\in L_{p'}C_\alpha(E)$，$q(z)\in C_\alpha^m(G)$，$0<\alpha<1$，$p'<2$，$m\geqslant1$，其中 G 为 z 平面上的某一个区域，则(1.1)的完全同胚 $w(z)$ 满足：1) $w(z)\in C_\alpha^1(E)$；2) $w(z)\in C_\alpha^{m+1}(G)$。

证 显然，从定理 3.1 可知 $w(z)\in C_\alpha^1(E)$。

设 G' 是 G 的某一个闭子区域，取一个多角形区域 G_0，使得 $G'\subset G_0$，$\bar{G}_0\subset G$。我们可以将 $q(z)$ 拓展到 G_0 之外，使得

$q(z)$ 仍满足定理的条件，记拓展后的函数为 $q_0(z)$。根据定理3.1，对应于 $q_0(z)$ 的 Beltrami 方程的完全同胚是存在的，记为 $w_0(z)$。根据定理 2.2，$w_0(z)\in C_\alpha^{m+1}(E)$。再由定理 3.2，方程 (1.1) 在 G_0 内的解 $w(z)=\Phi_0[w_0(z)]$，其中 $\Phi_0(w_0)$ 在区域 $w_0(G_0)$ 内解析。因此 $w(z)\in C_\alpha^{m+1}(G')$，即 $w(z)\in C_\alpha^{m+1}(G)$。

定理 3.4 在定理 3.2 的假设条件下，方程 (1.1) 的所有完全同胚 $w(z)$ 都可表示成如下的形式

$$w(z)=\frac{\alpha x(z)+\beta}{\gamma x(z)+\delta},\quad \alpha\delta-\gamma\beta\neq 0, \tag{3.2}$$

这里 $x(z)$ 是方程 (1.1) 形如 $x(z)=z+Tf$ 的完全同胚。

证 由定理 3.2，可知 $w=\Phi[x(z)]$，这里 $\Phi(x)$ 是解析函数，$x(z)$ 是完全同胚，因此 $\Phi(x)$ 是把 x 平面共形映射到 w 平面的同胚映射，即 $\Phi(x)$ 是分式线性映射

$$\Phi(x)=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\quad \alpha\delta-\gamma\beta\neq 0,$$

而 $x(z)$ 具有 (3.2) 的形式。

下面我们要消去上述各定理关于 $q(z)$ 的 Hölder 连续的假设。

定理 3.5 设 $q(z)$ 是可测函数并满足条件：$|q(z)|\leqslant q_0<1$（q_0 为常数），且当 $|z|>R$ $(R<+\infty)$ 时，$q(z)\equiv 0$，则方程 (1.1) 的形如 (1.3) 的解 $w(z)$ 实现 z 平面到 w 平面的同胚映射，并且 $w(z)$ 与其反函数 $z=z(w)$ 均属于某一个 $C_\alpha(E)$，$0<\alpha=\alpha(R,\ q_0)<1$。

证 假设 $q_n(z)$，$n=1,\ 2,\cdots$，是在全平面连续可微的函数列，满足条件

$$|q_n(z)|<q_0,$$

$$q_n(z)\equiv 0,\ \text{当}\ |z|>R,\quad \text{且}\ q_n(z)\xrightarrow{p.p.}q(z).$$

因此，对于任意 $p>0$，有

$$L_p(q_n-q,\ E)\to 0\quad (n\to\infty).$$

由定理 1.1，可知函数 $w_n(z)=z+Tf_n$ 是方程

$$w_{\bar z}-q_n(z)w_z=0 \tag{3.3}$$

的解，而 $f_n(z)$ 则是方程

$$f_n=q_n(z)\Pi f_n+q_n \tag{3.4}$$

的解。由（3.4）可得 $f_n(z)=0$（当 $|z|>R$），并且

$$L_p(f_n,\ E)\leqslant L_p(q_n(z)\Pi f_n,\ E)+L_p(q_n,\ E)$$
$$\leqslant q_0\Lambda_p L_p(f_n,\ E)+L_p(q_n,\ E).$$

选取 ε 充分小，使得当 $|p-2|\leqslant\varepsilon$ 时，$q_0\Lambda_p<1$。因此，

$$L_p(f_n,\ E)\leqslant\frac{1}{1-q_0\Lambda_p}L_p(q_n,\ E) \tag{3.5}$$

$$\leqslant\frac{C_1}{1-q_0\Lambda_p}<+\infty,$$

其中 C_1 是与 n，p 无关的常数。又由（3.4）有

$$f_n-f_m=q_n\Pi(f_n-f_m)+(q_n-q_m)\Pi f_m+q_n-q_m.$$

然而

$$L_p(q_n\Pi(f_n-f_m),\ E)\leqslant q_0L_p(\Pi(f_n-f_m),\ E)$$
$$\leqslant q_0\Lambda_p L_p(f_n-f_m,\ E).$$
$$L_p[(q_n-q_m)\Pi f_m,\ E]\leqslant L_{pq'}(q_n-q_m,\ E)L_{pp'}(\Pi f_m,E)$$
$$\leqslant\varepsilon_{n,m}\Lambda_{pp'}L_{pp'}(f_m,\ E),$$

其中 $\varepsilon_{n,m}=L_{pq'}(q_n-q_m,\ E)$，$\dfrac{1}{p'}+\dfrac{1}{q'}=1$，$p'>1$，$q'>1$。选取 p' 充分接近 1，使得 $q_0\Lambda_{pp'}<1$。从（3.5）式可得

$$L_{pp'}(f_m,E)\leqslant\frac{C_2}{1-q_0\Lambda_{pp'}},$$

这里 C_2 是与 n，m 无关的常数。于是

$$L_p(f_n - f_m,\ E) \leqslant q_0 \Lambda_p L_p(f_n - f_m,\ E)$$
$$+ \varepsilon_{n,m} \Lambda_{pp'} L_{pp'}(f_m, E) + \varepsilon'_{n,m},$$

其中 $\varepsilon'_{n,m} = L_p(q_n - q_m,\ E)$。因此

$$L_p(f_n - f_m,\ E) \leqslant \frac{1}{1 - q_0 \Lambda_p}\left[\varepsilon_{n,m} \Lambda_{pp'} \frac{C_2}{1 - q_0 \Lambda_{pp'}} + \varepsilon_{n,m}\right].$$

当 $n,\ m \to \infty$ 时，有 $\varepsilon_{n,m} \to 0$，$\varepsilon'_{n,m} \to 0$。从而 $L_p(f_n - f_m, E) \to 0$。所以存在 $f \in L_p(E)$，它在 $|z| > R$ 恒为零，并且使得 $L_p(f_n - f, E) \to 0 (n \to \infty)$，有 $L_p(\Pi(f_n - f), E) \to 0 (n \to \infty)$。再利用(3.4)式可知 $f - q(z)\Pi f = q(z)$。

记 $w(z) = z + Tf$，它是 (1.1) 的解。以下要证明 $w(z)$ 是定理中所要求的解。对于 $w - w_n = T(f - f_n)$，利用第一章定理 3.1，可得

$$C_\alpha(w - w_n) \leqslant M_1 L_p(f - f_n),\quad \alpha = \frac{p-2}{p},\quad p > 2,$$ 其中

M_1 是常数，$w_n(z)$ 在 E 上一致收敛于 $w(z) \in C_\alpha(E)$。根据定理 3.1 和定理 3.3，$w_n(z)$ 是 z 平面连续可微映射到 w 平面的同胚。以 $z_n(w)$ 表示 $w_n(z)$ 的反函数，对于所有 w 和 z，有 $z_n[w_n(z)] \equiv z$，$w_n[z_n(w)] = w$。易知，

$$z_{n\bar{w}} = \frac{-1}{J_n} w_{n\bar{z}},\quad z_{nw} = \frac{1}{J_n} \overline{w}_{n\bar{z}},$$

其中 $J_n = |w_{nz}|^2 - |w_{n\bar{z}}|^2 = (1 - |q_n|^2)|w_{nz}|^2 > 0$。因此

$$z_{n\bar{w}} + q_n[z_n(w)]\bar{z}_{n\bar{w}} = 0. \tag{3.6}$$

由于 $q_n[z_n(w)]$ 在 w 平面的某一个圆 K 外等于零，所以从(3.6)可知，在 K 之外 $z_{n\bar{w}} \equiv 0$。因之，$z_{n\bar{w}} \in L_p(E)$。再根据第一章定理 2.6 得到

$$z_n(w) = w + \Phi_n(w) + T(\tilde{f}_n), \tag{3.7}$$

其中 $\Phi_n(w)$ 在全平面上解析，$\tilde{f}_n = -q_n[z_n(w)]\bar{z}_{n\bar{w}}$。由此，$\tilde{f}_n$ 在 K 外为零。故 $\lim\limits_{w \to \infty} T(\tilde{f}_n) = 0$。 再因 $w - z_n(w) = w_n(z) - z$

$=Tf_n$，所以

$$\lim_{w\to\infty}[w-z_n(w)]=\lim_{z\to\infty}Tf_n=0.$$

由（3.7）式便知 $\lim\limits_{w\to\infty}\Phi_n(w)=0$，故 $\Phi_n(w)\equiv 0$。这样（3.7）式就成为

$$z_n(w)=w+T(\tilde{f}_n).$$

由这个公式和（3.6）式，可得关于 $\tilde{f}_n$ 的方程

$$\tilde{f}_n+q_n[z_n(w)]\overline{\Pi f_n}=-q_n[z_n(w)].$$

其中 $|q_n[z_n(w)]|\leqslant q_0<1$。与前类似，可证

(3.8) $$L_p[\tilde{f}_n,\ E]\leqslant C_3,$$

其中 C_3 与 n 无关，$p>2$，$q_0\Lambda_p<1$。由此，类似有

$$C_\alpha[z_n(w)-w,\ E]=C_\alpha[T(\tilde{f}_n),\ E]\leqslant M_2C_3,\quad \alpha=\frac{p-2}{p},$$ 此处 M_2 是常数，因此可选取子序列 $z_{n_k}(w)$ 在 w 平面上一致收敛于 $z(w)\in C_\alpha(E)$，而 $z(w(z))=z$，$w[z(w)]=w$。即 $w=w(z)$ 是 z 平面到 w 平面的同胚映射。定理 3.5 证毕。

在定理 3.5 中，假设了在 $|z|>R$ 内，$q(t)\equiv 0$。下面要取消这个假设。

定理 3.6 设 $q(z)\in L_{p'}(z)$，$p'<2$，$|q(z)|\leqslant q_0<1$。这里 q_0 为常数，则 Beltrami 方程(1.1)存在完全同胚 $w(z)\in C_\alpha(E)$，$0<\alpha<1$。

证 设 $w_R(z)=z+Tf_R$（$w_R(\infty)=\infty$）是方程

(3.9) $$w_{\bar{z}}-q_R(z)w_z=0$$

的完全同胚，其中

$$q_R(z)=\begin{cases}q(z), & |z|\leqslant R,\\ 0, & |z|>R.\end{cases}$$

由定理 3.5，可知 $w_R(z)\in C_\alpha(E)$，$0<\alpha<1$。

作函数变换

$$\zeta=\zeta(z)=\frac{1}{w_R(z)-w_R(0)},$$

显然$\zeta(0)=\infty$，$\zeta(\infty)=0$，由定理3.4，可知$\zeta(z)$也是(3.9)的完全同胚。

考察以下方程

(3.10) $$w_{\bar\zeta}-q_1(\zeta)w_\zeta=0,$$

其中

$$q_1(\zeta)=\frac{[q(z)-q_R(z)]\zeta_z}{[1-q(z)\overline{q_R(z)}]\bar\zeta_{\bar z}},\quad z=z(\zeta).$$

显然$|q_1(z)|\leqslant q_1'<1$，并且在$\zeta=\infty$的某一个邻域$D=\{\zeta(|z|<R)\}$中$q_1(\zeta)\equiv0$。使用定理1.1和定理3.5，可知方程(3.10)具有完全同胚$w_1(\zeta)\in C_a(E)$。

再来研究函数$w_*(z)=w_1[\zeta(z)]$.由于$\zeta(z)$和$w_1(\zeta)$是(3.9)和(3.10)的解，所以在$|z|>R$中，$\zeta_{\bar z}\equiv0$，而在$\zeta=\infty$邻的域D内，$w_{1\bar\zeta}=0$。这样一来，

$$w_{*z}=w_{1\zeta}\zeta_z,\quad w_{*\bar z}=w_{1\bar\zeta}\bar\zeta_{\bar z},\quad |z|>R;$$

$$w_{*z}=w_{1\zeta}\zeta_z,\quad w_{*\bar z}=w_{1\zeta}\zeta_{\bar z},\quad |z|<R.$$

于是当$|z|>R$时，有

$$w_{*\bar z}=q(\zeta)w_{1\zeta}\bar\zeta_{\bar z}=q(z)\frac{\zeta_z}{\bar\zeta_{\bar z}}w_{1\zeta}\bar\zeta_{\bar z}$$

$$=q(z)\zeta_zw_{1\zeta}=q(z)w_{*z}.$$

同理当$|z|<R$时，也有$w_{*\bar z}=q(z)w_{*z}$，即w_*是(1.1)的完全同胚，而

$$w(z)=\frac{1}{w_1[\zeta(z)]-w_1(0)}$$

是(1.1)的完全同胚。因为$\zeta=\zeta(z)$除$z=0$、∞之外属于$C_a(E)$，又$w_1(\zeta)\in C_a(E)$，所以，$w(z)$除$z=0$、∞之外属于$C_a(E)$，又因$w(\infty)=\infty$，故在平面E的任意有限部分$w(z)$

$\in C_{\alpha}(E)$.

§ 4 Beltrami 方程解的表示式

在定理 1.1、定理 3.2 和定理 3.4 中，我们得到了 Beltrami 方程解的几种表示式：$w(z)=z+Tf$，$w(z)=\Phi[x(z)]$和

$$w(z)=\frac{\alpha x(z)+\beta}{\gamma x(z)+\delta}.$$

其中 $x(z)$ 是完全同胚，但是这些解所建立的映射，一般来说不是连续可微的。然而可以证明：当解 $w(z)=z+Tf\in D_{1,p}(p>2)$ 时，它具有类似于连续可微映射的一系列性质。有了这些结论，我们可只在 $|q(z)|\leqslant q_0<1$ 的条件下研究（1.1）解的性质，并将证明以下定理。

定理 4.1 设 $|q(z)|\leqslant q_0(q_0<1)$，$q(z)\in L_{p}{}'(G)$ $(q'<2)$，又 $w(z)=z+Tf$ 是 Beltrami 方程(1.1)于全平面上的解，Ω 是可测集，则

1）$w(\Omega)$ 的测度为

$$\operatorname{mes} w(\Omega)=\iint_{\Omega} J_w(z)\,d\sigma_z,$$

此处 J_w 是 $w=w(z)$ 的 Jocobi 行列式

$$J_w=\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2-\left|\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right|^2.$$

2）对于任意在集合 $w(\Omega)$ 上的可和函数 $f(w)$，$\varphi(z)=f(w(z))$ 在 Ω 上可知，并且有

$$\iint_{w(\Omega)} f(w)\,d\sigma_w=\iint_{\Omega}\varphi(z)J_w(z)\,d\sigma_z.$$

3）设 Ω 是某一开集，如果函数 $f(w)$ 连续且 $f\in D_{1,2}(w(\Omega))$，

那么函数 $\varphi(z)=f(w(z))\in D_{1,2}(\Omega)$，并且下面公式在 Ω 中几乎处处成立

$$\varphi_{\bar z}=f_w w_{\bar z}+f_{\bar w}\bar w_{\bar z},$$
$$\varphi_z=f_w w_z+f_{\bar w}\bar w_z.$$

4）设 δ 充分小，对于满足

$$L_p[\Pi f]\leqslant\wedge_p L_p(f)$$

和 $q_0\wedge_p<1$，$|2-q|<\delta$ 的 q，$w=w(z)$ 及其反函数 $z=z(w)\in D_{1,p}(E)$，并且 $z(w)$ 也有以上性质 1)、2)、3)。

5）令

$$J_z=\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|^2-\left|\frac{\partial z}{\partial\bar w}\right|^2,$$

则 $J_zJ_w\equiv1$ 几乎处处成立，特别，几乎处处有 $J_z>0$，$J_w>0$。

证 首先说明：由于定理1.1，可知 $w(z)\in D_{1,p}(E)$，$p>2$。

1）若 $w_n(z)=z+Tf_n$ 是如定理 3.5 中所述方程（3.3）的连续可微解，记

$$J_n(z)=\left|\frac{\partial w_n}{\partial z}\right|^2-\left|\frac{\partial w_n}{\partial\bar z}\right|^2,$$

则对于任意可测集合 Ω，象集 $w_n(\Omega)$ 的测度

$$\text{mes}\,w_n(\Omega)=\iint_\Omega J_n d\sigma_z. \tag{4.1}$$

设 $\text{mes}\,\Omega\leqslant C_1$，此处 C_1 是一个固定常数．应用 Hölder 不等式、（4.1）以及 $w_n(z)$ 的表示式，有

$$\text{mes}\,w_n(\Omega)\leqslant\iint_\Omega|1+\Pi(f_n)|^2 d\sigma_z \tag{4.2}$$

$$\leqslant2\left(\iint_\Omega d\sigma_z+\iint_\Omega|\Pi f_n|^2 d\sigma_z\right.$$

$$\leqslant 2\left[\text{mes}\Omega + \left(\wedge_p L_p(f_n)\right)^2\left(\text{mes}\Omega\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leqslant C_2(\text{mes}\Omega)^{\frac{1}{q}},$$

此处$\frac{1}{q}+\frac{2}{p}=1$，$p>2$，$C_2$是一个仅仅依赖于$q_0$、$p$和$C_1$的常数。

现在利用（4.2）式来证明

$$(4.3)\qquad \text{mes}^* w(\Omega)\leqslant C_2(\text{mes}\Omega)^{\frac{1}{q}}.$$

假定Ω是开集，设$w_0\in w(\Omega)$，则有点$z_0\in\Omega$，使$w_0=w(z_0)$，并且Ω包含有以z_0为中心，$\delta>0$为半径的圆$K(z_0)$。又设z_1在圆$K(z_0)$的圆周上，则由第一章（3.3）式及本章（3.8）式，有

$$\delta=|z_0-z_1|\leqslant C_3|w_n(z_0)-w_n(z_1)|\beta,$$

此处常数C_3、$\beta(>0)$与n无关。因为$w=w_n(z)$实现z平面到w平面的同胚映射，由上面不等式可知：在映射$w=w_n(z)$之下，圆$K(z_0)$的象复盖某个以$w_n(z_0)$为中心、半径不小于$\left(\frac{\delta}{C_3}\right)^{\frac{1}{\beta}}$的圆。又注意到$w_n(z_0)\to w(z_0)(n\to\infty)$，因此从充分大的$n$开始，$w_0=w(z_0)\in w_n(\Omega)$。于是

$$w(\Omega)\subset\sum_{k=1}^{\infty}E_k,\quad E_k=\bigcap_{n=k}^{\infty}w_n(\Omega).$$

再由（4.2）可知：（4.3）式对于开集成立。

对于任意可测集Ω，任取$\varepsilon>0$，都存在开集Ω'使得$\Omega\subset\Omega'$，并且

$$\text{mes}\Omega'<\text{mes}\Omega+\varepsilon,$$

故

$$\text{mes}^* w(\Omega) \leqslant \text{mes} w(\Omega') \leqslant C_2(\text{mes}\Omega')^{\frac{1}{q}}$$

$$< C_2(\text{mes}\Omega + \varepsilon)^{\frac{1}{q}}.$$

由于 ε 的任意性，可知(4.3)式对任意可测集成立。

设 Ω_0 是一个长方形，使得 $\text{mes}\Omega_0 \leqslant C_4$，$C_4$ 为一常数。使用(4.2)、(4.3)，可得

$$\lim_{n\to\infty} \text{mes} w_n(\Omega_0) = \text{mes} w(\Omega_0). \tag{4.4}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$，$J_w = |1+\Pi f|^2 - |f|^2$，所以存在子数列 $n_k \to \infty$ $(k\to\infty)$，使得

$$J_{n_k} \to J_w \quad (k\to\infty)$$

几乎处处成立。由于对于任意可测集 $\Omega \subset \Omega_0$，(4.2)式成立，再对积分 $\iint\limits_{\Omega} J_{n_k} d\sigma_z$，使用(4.1)式，可得

$$\text{mes}\, w(\Omega_0) = \iint\limits_{\Omega_0} J_w\, d\sigma_z.$$

最后利用(4.3)式，可知：

$$\text{mes} w(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} J_w(z) d\sigma_z,$$

对任意可测集 Ω 成立。

2) 使用 1) 可推知 2)成立。

3) 若 $w = w(z)$ 是连续可微的变换，那么由第一章定理5.2,可知在集合 Ω 每点的一邻域，结论 3) 成立。

现在考虑 3) 的假设，令 $D = w(\Omega)$，$w_0 = w(z_0)$，$z_0 \in \Omega$。设 $w_n(z)$ 连续可微，并且 $w_n(z) \to w(z)\ (n\to\infty)$。记 $\varphi_n(z) = f(w_n(z))$，那么在某个以 z_0 为中心的充分小的圆 s 中，显然有

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = f_w(w_n(z))\frac{\partial w_n}{\partial z} + f_{\bar{w}}(w_n(z))\frac{\partial \overline{w}_n}{\partial z}.$$

因此，

$$\iint_{s}\left|\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}\right|^2 d\sigma_z \leqslant \iint_{w_n(s)} \frac{|f_w(w)(w_n)_z + f_{\bar{w}}(w)(\bar{w}_n)_z|^2}{J_n} d\sigma_w$$

$$\leqslant 2\iint_{w_n(s)} \frac{|f_w|^2 + q_0^2|f_{\bar{w}}|^2}{1-q_0^2} d\sigma_w.$$

显然此处的上界可与 n 无关。注意到在 s 上，$\varphi_n(z)$ 一致收敛于 $\varphi(z)=f(w(z))$，所以结论 3）对于 $f\in D_{1,2}(w(\Omega))$成立。

4）假定 $z_n(w)$如定理 3.5 中所述，记

$$\tilde{q}_n(w)=q(z_n(w)),\quad \tilde{q}(w)=q(z(w)),$$

此处 $z_n(w)$满足方程(3.6)，即 $z_{n\bar{w}}+\tilde{q}(w)\bar{z}_{nw}=0$。

首先证明：对于任意 $\varepsilon>0$，有

$$\text{mes}E\{|\tilde{q}(w)-\tilde{q}_n(w)|>\varepsilon\}\to 0\quad (n\to\infty). \tag{4.5}$$

由于当 $|z|>R$ 时，$q_n(z)\equiv 0$，又当 n 充分大时，$\tilde{q}(w)=\tilde{q}_n(w)=0$ $(|z|>R)$。所以依照 Д.Ф. Егоров 定理，对于任意予先指定的 σ 和 η 都存在集合 $K_{\sigma,\eta}$，使得当 $n>N(\sigma,\eta)$，$z\in K_{\sigma,\eta}$ 时，有

$$\text{mes}(K-K_{\sigma,\eta})<\sigma,$$

$$|q_n(z)-g(z)|<\eta. \tag{4.6}$$

转到变量 $w=w_n(z)$，对于 $n>N$，$w\bar{\in} w_n(K-K_{\sigma,\eta})$有

$$|q_n(z_n(w))-q(z_n(w))|<\eta,$$

又由于(4.2)式，有

$$\text{mes}w_n(K-K_{\sigma,\eta})<c\sigma^{\frac{1}{q}}. \tag{4.7}$$

另一方面，由 Лузин 定理，对于任意 σ_1，η_1 和 σ_1 存在集合 $K_{\sigma_1,\eta_1,\delta_1}$ 使得当 $|z-z'|<\delta_1$，z，$z'\in K_{\sigma_1,\eta_1,\delta_1}$，$\text{mes}(K-K_{\sigma_1,\eta_1,\delta_1})<\sigma_1$ 时有

$$|q(z)-q(z')|<\eta_1. \tag{4.8}$$

而当 $n\to\infty$ 时，在整个平面上，$z_n(w)$ 一致收敛到 $z(w)$，所以由上式，对于

(4.9) $$w \in w_n(K - K_{\sigma_1,\eta_1,\delta_1}),$$
$$w \in w(K - K_{\sigma_1,\eta_1,\delta_1}),$$

有

(4.10) $$|g(z_n(w)) - g(z(w))| < \eta_1.$$

即由(4.2)、(4.3)知，除去测度为$2c\sigma_1^{\frac{1}{q}}$的集合外，对于任意$\varepsilon>0$，$\delta>0$. 置$\eta_1=\eta=\frac{\varepsilon}{2}$，$\sigma_1=\sigma=\left(\frac{\delta}{3c}\right)^q$，利用(4.7)、(4.10)式，对于$w\in W(K)$和适合$|z_n(w)-z(w)|<\delta$的$n$，导出某集合的余集的测度不超过$2c\sigma_1^{\frac{1}{q}}+c\sigma^{\frac{1}{q}}=\delta$的集合外，有

$$|\tilde{q}(w) - \tilde{q}_n(w)| < \varepsilon,$$

于是(4.5)成立、即$\tilde{q}_n(w)$度量收敛于$\tilde{q}(w)$.

因此，对于任意$p>1$和$z=z(w)$，有

(4.11) $$L_p(\tilde{q}_n(w) - \tilde{q}(w)) \to 0 (n \to \infty).$$

显然，从不等式$|\tilde{q}_n(w)|\leqslant q_0$，$|\tilde{q}(w)|\leqslant q_0$，$q_0<1$，(4.5)、(4.11)以及(3.6)可知$z=z(w)$也有性质1)、2)、3)，且$z(w)\in D_{1,p}(E)$，$p>2$.

5) 注意到几乎处处有$J_{n_k}\to J_w(k\to\infty)$，$J_n(z)\cdot J_n(w)=1$以及关于$J_z$的类似的事实，再借助于取极限，可得5).定理4.1证毕.

利用上述定理可得如下结果：

定理 4.2 设$|g(z)|\leqslant q_0<1$（q_0为常数），$q(z)\in L_p'(G)$（$p'<2$），设$w(z)$是(1.1)属于$D_{1,p}(G)(p>2)$的正则解，则$w(z)$可以表示成

(4.12) $$w(z) = \Phi[x(z)], \quad x(z) = z + Tf,$$

其中f是$f-g\Pi f=q$的解，$\Phi(x)$是区域$x(G)$上的任意解析函数. 如果正则解$w(z)$在G内有孤立奇点，则$w(z)$也有(4.12)的表示式. 反之，设$\Phi(x)$是在区域$x(G)$内除孤立奇点外是解析的，则形如(4.12)的函数$w(z)$是方程(1.1)的正则解.

证 先设 $w(z)$ 是 Beltrami 方程(1.1)于区域 G 内的正则解，且 $w(z)\in D_{1,p}(G)\,(p>2)$。由定理 3.5，知 $x(z)=z+Tf$ 是 z 平面到 x 平面的同胚映射.使得 $x(\infty)=\infty$.以$z(x)$ 以表示 $x(z)$ 的反函数，考虑 $\Phi(x)=w[z(x)]$，使用定理 4.1，可知 $z(x)\in D_{1,p}(E)$，$p>2$，并可推出：$\Phi(x)\in D_{1,2}(x(G))$，且在 $x(G)$内几乎处处有

$$\Phi_{\bar{x}}=w_z z_{\bar{x}}+w_{\bar{z}}\bar{z}_{\bar{x}}=w_z(z_{\bar{x}}+q)z(x)\bar{z}_{\bar{x}})=0.$$

根据第一章定理 2.6，便知 $\Phi(x)$ 是区域 $x(G)$ 内的解析函数。反之，设 $\Phi(x)$是区域 $x(G)$内的解析函数，由于 $w_{\bar{z}}=\Phi'[x(z)x]$，$w_z=\Phi'[x(z)]x_z$，故 $w_{\bar{z}}-q(z)w_z=\Phi'[x(z)][x_{\bar{z}}-q(z)x_z]=0$，这就证明了 $w(z)$ 是方程(1.1)于区域 G 内的正则解，并容易推知 $w(z)\in D_{1,p}(G)$。类似地也可证明定理的其余部分。

由定理 3.5 与定理 4.2，可知方程(1.1)在区域 G 内的任意正则解满足 Hölder 条件，这样便可将解析函数的许多性质如辐角原理、奇点附近的性质等转到复方程(1.1)的解上来。

§5 拟共形映射的基本定理

本节首先给出 Beltrami 复方程(1.1)将多连通区域 D 映射到一些典型区域的同胚解即拟共形映射的存在唯一性定理，然后讨论复方程

(5.1) $$w_{\bar{z}}-q(z)\overline{w}_{\bar{z}}=0,\quad |q(z)|\leqslant q_0<1,$$

及

(5.2) $$w_{\bar{z}}-q_1(z)w_z-q_2(z)\overline{w}_{\bar{z}}=0,$$
$$|q_1(z)|+|q_2(z)|\leqslant q_0<1$$

于有界单连通区域 D 上的相应结果，此处 q_1、q_2、q 在 D外等于 0。

一、关于复方程(1.1)的基本定理

不妨设 D 是有界 $N+1$ 连通圆界区域，其边界 Γ 是由 $N+1$ 个圆周 Γ_j: $|z-z_j|=\gamma_j(j=0, 1, \cdots, N)$ 组成，其中 Γ_0 为 $|z|=\gamma_0=1$, $|z_j|<1$, $\gamma_j<1(j=1,\cdots,N)$，又 $z=0\in D$。因为否则，使用一个单叶亚纯函数 $\zeta(z)$，它将一般 $N+1$ 连通区域 D（不妨设 D 的各边界分支均多于一点）映射到上述圆界区域，而方程(1.1)转化为

$$w_{\bar{\zeta}}-q(z_1(\zeta))w_{\zeta}=0, \quad |q(z(\zeta))|\leqslant q_0<1.$$

其中 $z(\zeta)$ 是 $\zeta(z)$ 的反函数。以上方程与方程(1.1)可以看作是相同的。

定理 5.1 如果复方程(1.1)中的系数 $q(z)$ 满足 $|q(z)|\leqslant q_0<1$，且 $q(z)\equiv 0$, $z\bar{\in} D$，那么它存在着同胚解 $w(z)$，将 $N+1$ 连通圆界区域 D 拟共形映射到：

(1) w 平面上的 $N+1$ 连通圆界区域 G (G 与 D 类型相同)，使 $w(0)=0$, $w(1)=1$。

(2) w 平面上的螺旋割线区域 B，使 $w(0)=\infty$, $w(a)=0$ $(a\in D)$，又 $w(1)=1$，这里的典型区域 B 是指 w 平面上去掉 $N+1$ 条对实轴倾角分别为 $\theta_j-\frac{\pi}{2}(j=0, 1, \cdots, N)$ 的螺线的区域。

(3) w 平面上单位圆 $|w|<1$ 内去掉 N 条同心圆弧的区域 H，使 $w(0)=0$, $w(1)=1$。

(4) W 平面上的平行割线区域 S，使 $w(0)=\infty$, $w(a)=0$，又 $|w(1)|=1$，这里的平行割线区域 S 是指 w 平面去掉 $N+1$ 条对实轴倾角为 $\theta-\frac{\pi}{2}$ (θ 为常数) 的区域。

证 由定理 3.5，可知方程 (1.1) 具有形如 (1.3) 的解，$\chi(z)=z+Tf$，它是 z 平面上的完全同胚，$\chi(\infty)=\infty$，且这种解

是唯一的。设 $x(z)$ 将区域 D 拟共形映射到区域 $x(D)$，然后根据共形映射的理论，存在单叶解析函数 $w=\Phi(x)$，它将区域 $x(D)$ 共形映射到 $N+1$ 连通圆界区域 G，且可要求将 $x(0)$，$x(1)$ 分别映射到点 0，1，而这样的函数也是唯一的。容易验证：$w(z)=\Phi[x(z)]$ 也是方程 (1.1) 的同胚解，将 D 拟共形映射到定理中(1)所述的区域 G。情形(2)，(3)，(4)也可类似地证明，只要将(1)中的 $\Phi(x)$ 代以分别将区域 $x(D)$ 单叶映射到 (2)、(3)、(4)所述典型区域的亚纯函数，并使 $w(z)=\Phi(x(z))$ 符合规范化的条件。

以上证明了方程(1.1)的 $N+1$ 连通圆界区域到一些典型区域的拟共形映射 $w(z)$ 的存在性。在一些附加条件下，还可证明上述拟共形映射 $w(z)$ 是唯一的。

定理 5.2 定理 5.1 中所述的将区域 D 拟共形映射到所述各典型区域的函数都是唯一的。对于情形(1)、(3)，其中的规范化条件可以代替下面的条件之一：

1°) 使边界 Γ_0：$|z|=1$ 上三点保持不变；

2°) 使 Γ_0 上一点 a_1 和 D 内一点 b_1 保持不变。

这从定理 5.1 的证明可知。

二、关于复方程(5.1)、(5.2)的基本定理

设 D 是单连通区域，不妨认为是单位圆，因为通过将一般边界多于一点的单连通区域 G 单叶映射到单位圆 $|\zeta|<1$ 的亚纯函数 $\zeta(z)$，则可将方程(5.2)转化为

$$w_{\bar{\zeta}}-q_1[z(\zeta)]w_\zeta-q_2[z(\zeta)]\frac{\overline{z'(\zeta)}}{z'(\zeta)}\bar{w}_{\bar{\zeta}}=0,$$

其中 $|q_1[z(\zeta)]|+|q_2[z(\zeta)]\frac{\overline{z'(\zeta)}}{z'(\zeta)}|\leqslant q_0<1$，以上方程与方程(5.2)本质上是相同的。现在讨论复方程 (5.2) 于 D 上拟共形映

射的基本定理至于复方程(5.1)，则可把它看作是复方程(5.2)的特殊情形，即 $q_1(z)\equiv 0$ 的情况。

下面先讨论方程(5.2)的拟共形映射的存在定理，即

定理 5.3 如果复方程(5.2)中系数 $q_j(z)\equiv 0$，当 $z\in D$，$j=1,2$，那么它存在着将单位圆 D 拟共形映射到单位圆的同胚解 $w(z)$，使得 $w(0)=0$，$w(1)=1$。

证 首先假定(5.2)中系数 $q_1(z)$，$q_2(z)$ 在 $z=0$ 的某个邻域 $|z|<\frac{1}{m}$（m 为正整数）内等于零。如果方程(5.2)具有形如下的解

$$w(z)=ze^{\varphi(z)}, \tag{5.3}$$

其中

$$\varphi(z)=T_1(\omega)=\frac{-1}{\pi}\iint_D\left\{\frac{\omega(t)}{t-z}+\frac{z\overline{\omega(t)}}{1-z\bar{t}}\right\}d\sigma_t, \tag{5.4}$$

此处 $\omega(z)$ 是一个复变函数，$\omega=\omega(z)\in L_p(\bar{D})$。易知对任意的 $\omega\in L_p\bar{D})(p>2)$，有：$w(0)=0$，又当 $z\in\Gamma=\{|z|=1\}$ 时，$Re\varphi(z)\equiv 0$，因而 $|w(z)|=1$，不妨认为 $w(1)=1$（否则经过旋转变换即可达到要求)，对于 $|w|<1$ 内任一点 w_0，易知 $w(z)-w_0$ 仍是方程(5.2)于 D 内的解。令

$$q(z)=\begin{cases}q_1(z)+q_2(z)\dfrac{\overline{w_z}}{w_z}, & \text{当 } w_z\neq 0,\\ q_1(z)+q_2(z), & \text{当 } w_z=0,\end{cases} \tag{5.5}$$

则 $w(z)-w_0$ 是形如(1.1)的 Beltrami 方程于 D 的解，根据定理 4.2，它可表示成(4.12)的形式。根据辐角定理，$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg[w(z)-w_0]=1$，故在 D 内有一点且只有一点 z_0，使 $w(z_0)=w_0$。且可证：$w(z)$ 不能将 $|z|<1$ 内的点变到 $|w|>1$ 上。因此，$w(z)$ 将单位圆 $|z|<1$ 单叶映射到单位圆 $|w|<1$，且 $w(0)=0$，

$w(1)=1$。注意到

$$w_{\bar z}=ze^{T_1(\omega)}\omega,\quad w_z=e^{T_1(\omega)}+ze^{T_1(\omega)}s_1(\omega),$$

这里 $s_1(\omega)=\dfrac{\partial T_1(\omega)}{\partial z}=\dfrac{-1}{\pi}\iint\limits_G\left\{\dfrac{\omega(t)}{(t-z)^2}+\dfrac{\overline{\omega(t)}}{(1-z\bar t)^2}\right\}d\sigma_t$，便得到与(5.2)等价的积分方程

$$\omega-q_1s_1(\omega)-q_2\frac{\bar w}{w}\overline{s_1(\omega)}=\frac{q_1}{z}+\frac{q_2}{z}e^{\overline{T_1(\omega)}-T_1(\omega)}.\tag{5.6}$$

选取 $p(>2)$ 足够接近于 2，使得 $q_0\wedge_p<1$，这里 $\wedge_p$ 是算子 $s_1(\omega)$ 的范数（见[128]31)第二章)。从(5.6)，可推得

$$|\omega|\leqslant|q_1|+|q_2|)|s_1(\omega)|+q,\quad q=2(|q_1|+|q_2|)/|z|,$$

$$L_p[\omega,\ \bar D]\leqslant q_0\wedge_pL_p[\omega,\bar D]+L_p[q,\bar D].$$

而 $\omega(z)$ 满足估计式

$$L_p[\omega,\bar D]\leqslant\frac{L_p[q,\bar D]}{1-q_0\wedge_p}=M,\tag{5.7}$$

这里 M 是仅与 q_0，p 有关的常数. 引入 Banach 空间 $B=L_p(\bar D)$ 中的有界闭凸集 B_M，其中元素是满足以下条件的可测函数 $\omega(z)$：

$$L_p[\omega,\bar D]\leqslant M.\tag{5.8}$$

任取 $-\omega(z)\in B_M$，作 $\omega(z)=ze^{T_1(\omega)}$，考虑积分方程

$$\Omega-q_1s_1(\Omega)-q_2\frac{\bar w}{w}\overline{s_1(\Omega)}=\frac{q_1}{z}+\frac{q_2}{z}e^{\overline{T_1(\omega)}-T_1(\omega)}.\tag{5.9}$$

由压缩映射原理，可由(5.9)确定唯一的函数 $\omega(z)\in B_M$，这就得到了从 $\omega\in B_M$ 到自身的映射

$$\Omega=S(\omega).\tag{5.10}$$

下面证明 $S(\omega)$ 是 B_M 上的完全连续映射.

设 $\omega_n\in B_M$ 为一函数序列，$n=0,1,2,\cdots$，使 $L_p[\omega_n-\omega_0,\bar D]\to0(n\to\infty)$，而 $\Omega_n=S(\omega_n)$，根据第一章定理3.1，可推知 $T_1(\omega)$ 是 $L_p(\bar D)$ 上的完全连续映射，故当 $n\to\infty$ 时，$w_n=z_e^{T_1(\omega_n)}$

在 $\bar{D}$ 内一致收敛到 $w_0 = ze^{T(\omega_0)}$，而序列 $q_2\frac{\bar{w}_n}{w_n}$ 和 $q_2\frac{1}{z}e^{\overline{T_1(w_n)}-T_1(w_n)}$ 在 $\bar{D}$ 上也一致收敛到 $q_0\frac{\bar{w}_0}{w_0}$ 和 $q_2\frac{1}{z}e^{\overline{T_1(w_0)}-T_1(w_0)}$。将对应于 $\Omega_n = s(\omega_n)$ 与 $\Omega_0 = s(\omega_0)$ 的积分方程相减，得

$$\Omega_n - \Omega_0 - q_1 s_1(\Omega_n - \Omega_0) - q_2\frac{\bar{w}_n}{w_n}\overline{s_1(\Omega_n - \Omega_0)} = Q_n(z),$$

$$Q_n(z) = q_2 s_1(\Omega_0)\left(\frac{\bar{w}_n}{w_n} - \frac{\bar{w}_0}{w_0}\right) + \frac{q_2}{z}\left[e^{\overline{T_1(w_n)}-T_1(w_n)}\right.$$

$$\left. - e^{\overline{T_1(w_0)}-T_1(w_0)}\right],$$

这里 $w_n(z) = ze^{T_1(w_n)}$，$w_0(z) = ze^{T_1(w_0)}$，并可证 $L_p[Q_n(z), E]\to 0$ $(n\to\infty)$，又从以上方程，可得 $L_p[\Omega_n - \Omega_0, E]\leqslant\frac{L_p[Q_n, E]}{1-q_0\wedge_p}$，故 $L_p[\Omega_n - \Omega_0, E]\to 0(n\to\infty)$。这表明：积分方程 (5.9) 确定的 $\Omega = s(\omega)$ 连续映射 B_M 到自身。类似可证 $\Omega = S(\omega)$ 将 B_M 映射到自身的紧集。因此，由 Schauder 定理（见[107]），可知算子 $\Omega = S(\omega)$ 有一个不动点 ω，即存在 $\omega(z)\in B_M$，使 $\omega = S(\omega)$，即方程(5.6)可解，因而(5.3)是方程(5.2)所要求的同胚解。

最后，消去在 $z=0$ 的邻域内 q_1，q_2 等于零的假设。事实上，设

$$q_j^m(z) = \begin{cases} q_j(z), & \frac{1}{m}\leqslant|z|\leqslant 1, \\ 0, & |z|<\frac{1}{m}\text{及}|z|>1, \end{cases} \quad j = 1,\ 2,$$

易知

$$q_j^m(z)\to q_j(z)(m\to\infty),\ |z|>0,\ j=1,2,\ \text{且}$$
$$|q_1^m(z)| + |q_2^m(z)|\leqslant q_0<1(m=1,2,\cdots)。$$

由前所证，方程

$$(5.11)\qquad w_{\bar z}-q_1^m(z)w_z-q_2^m(z)\overline{w}_{\bar z}=0$$

存在将单位圆 D 拟共形映射到自身的同胚解 $w_m(z)$，使得$w_m(0)=0$，$w_m(1)=1(m=1,2,\cdots)$。由定理 4.2，此解 $w_m(z)$ 可表示成 $w_m(z)=\Phi_m[x_m(z)]$，$x_m(z)=z+T\omega_m$，$\Phi_m(x)$是区域 $x_m(D)$ 上的单叶解析函数。注意到 $\omega_m(z)$是积分方程

$$(5.12)\qquad \omega_m-q_1^m\Pi\omega_m-q_2^m\frac{\overline{\Phi_m'(x)}}{\Phi_m'(x)}\overline{\Pi\omega_m}=q_1^m+q_2^m\frac{\overline{\Phi_m'(x)}}{\Phi_m'(x)}$$

的解，且 $L_p[\omega_m,\ E]\leqslant\dfrac{q_0\pi^{\frac{1}{p}}}{1-q_0\wedge p}<\infty$，由第一章定理 3.3，可推得：$x_m(z)$及其反函数 $z_m(x)$满足估计式 $C_a[x_m(z)-z,E]\leqslant M_1$，$C_a[z_m(x)-x,E]\leqslant M_2$，这里 $a=1-2/p$，M_1、M_2 均为常数，因此可从$\{x_m(z)\}$选取子序列$\{x_{m_k}(z)\}$在 $\bar D$ 上一致收敛到 $x_0(z)=z+T\omega_0$，其中 $\omega_{m_k}(z)$ 在 $\bar D$ 上弱收敛到 $\omega_0(z)$，而区域序列$\{x_{m_k}(D)\}$收敛到 $x_0(D)$。由 Caratheodory 定理，可知 $\Phi_{m_k}(x)$、$\Phi_{m_k}'(x)$在 $x_0(D)$内闭一致收敛到 $\Phi_0(x)$、$\Phi_0'(x)$，而 $\Phi_0(x)$ 是将区域 $x_0(D)$映射到 $|w|<1$ 的单叶解析函数，使得 $\Phi_0(x_0(0))=0$，$\Phi_1(x_1(1)=1$，记 $w_0(z)=\Phi_0[x_0(z)]$，并由 (5.12) 可推出 $\omega_0(z)$ 是积分方程

$$\omega_0-q_1\Pi\omega_0-q_0\frac{\overline{\Phi_0'(x)}}{\Phi_0'(x)}\overline{\Pi\omega_0}=q_1+q_2\frac{\overline{\Phi_0'(x)}}{\Phi_0'(x)}$$

的解，由此可知 $w_0(z)$是方程

$$w_{0\bar z}-q_1w_{0z}-q_0\overline{w}_{0\bar z}=0$$

将 D 映射到自己的同胚解，且 $w_0(0)=0$，$w_0(1)=1$。

最后证明定理 5.3 中所述同胚解是唯一的，即有

定理 5.4 假设 $w=w(z)$ 是方程(5.2)的同胚解，将单位圆映射到自己，只要它满足如下条件之一，那么 $w(z)$是唯一的，

1°) $w(z_j)=w_j(j=1,\ 2,\ 3)$，其中 $z_j,w_j(j=1,\ 2,\ 3)$ 分别是圆周 $|z|=1$ 和 $|w|=1$ 上三个按正向排列的固定点。

2°) $w(z_0)=w_0$，$w(z_1)=w_1$，其中 z_0，w_0 分别是圆 $|z|<1$ 和 $|w|<1$ 内部的固定点；z_1，w_1 分别是圆周 $|z|=1$ 和 $|w|=1$ 上的固定点。

证 设 $w_1(z)$，$w_2(z)$ 是定理中所述的两个同胚解，记 $L=w_k(\Gamma)=\{|w|=1\}$，$k=1$，2. 假设 $w_1(z)\neq w_2(z)$，将函数 $w_k(z)(k=1,2)$ 沿 $\Gamma=\{|z|=1\}$ 从 $\bar{D}$ 开拓到 D 外，即令

$$
(5.13)\quad W_k(z)=\begin{cases} w_k(z), & z\in\bar{D}, \\ \dfrac{1}{\overline{w_k\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right)}}, & z\in D_0=\{1<|z|\leqslant 1+\eta\} \end{cases} \quad k=1,2,
$$

其中 $D_0=\{1<|z|\leqslant 1+\eta\}$，只要 $\eta(>0)$ 适当小，就可使上式中的 $W_k(z)(k=1,2)$ 有定义. 对 $z=\dfrac{1}{\bar{\zeta}}$，当 $1<|z|\leqslant 1+\eta$ 时，则

$$
\frac{1}{1+\eta}\leqslant|\zeta|<1,\quad w_k(\zeta)=\frac{1}{\overline{W_k(z)}},
$$

注意到

$$
w_{k\bar{\zeta}}(\zeta)=\left[\frac{z}{\overline{W_k(z)}}\right]^2\overline{W_{k\bar{z}}(z)},\quad w_{k\zeta}=\overline{\left[\frac{z}{W_k(z)}\right]^2 W_{kz}(z)},
$$

$$
w_{k\bar{\zeta}}=\left[\frac{z}{w_k(z)}\right]^2 w_{kz}(z),
$$

故由 $w_{k\bar{\zeta}}=q_1(\zeta)w_{k\zeta}+q_2(\zeta)\overline{w}_{k\bar{\zeta}}$，$\dfrac{1}{1+\eta}\leqslant|\zeta|<1$，可得

$$
W_{k\bar{z}}(z)=\left[\frac{z}{\bar{z}}\right]^2\overline{q_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}W_{kz}+\frac{W_k(z)}{\overline{W_k(z)}}\overline{q_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\overline{W}_{kz},
$$

$1<|z|\leqslant 1+\eta$,

将 $k=1,2$ 的以上方程相减，并设 $W(z)=W_1(z)-W_2(z)$，则在 $D_\eta=\bar{D}+D_0$ 上，$W(z)$ 几乎处处满足方程

$$
W_{\bar{z}}-Q(z)W_z=A(z)W(z),
$$

其中

$$Q(z)=\begin{cases} q_1(z)+q_2(z)\dfrac{\overline{W_z}}{W_z}, & z\in D,\\ \left(\dfrac{z}{\bar z}\right)^2\overline{q_1\left(\dfrac{1}{\bar z}\right)}+\left(\dfrac{\overline{W_1(z)}}{W_1(z)}\right)^2\overline{q_2\left(\dfrac{1}{\bar z}\right)}\dfrac{\overline{W_z}}{W_z}, & z\in D_0,\end{cases}$$

$$A(z)=\begin{cases}0, & z\in D,\\ \overline{q_2\left(\dfrac{1}{\bar z}\right)W_{zz}}\left[\left(\dfrac{W_1}{\overline{W_1}}\right)^2-\left(\dfrac{W_2}{\overline{W_2}}\right)^2\right]\Big/W, & z\in D_0,\end{cases}$$

这里 $|Q|z)|\leqslant q_0$，$z\in D_\eta$；$A(z)\in L_p(D_\eta)$，$p>2$。由 [128] 31) 第四章定理推论 1.1，可知 $W(z)$在 D_η 上具有表示式

$$W(z)=\Phi(x(z))e^{\varphi(z)},\tag{5.14}$$

其中 $x(z)=z+T\omega$，$\varphi(z)$在 D_η 上连续，由 $W(z)$ 在区域上零点的孤立性，只要 η 适当小，就可使$W(z)$在 $\dfrac{1}{1+\eta}\leqslant|z|<1$，$1<z\leqslant 1+\eta$，上无零点，记 $\Gamma_\eta=\{|z|=1+\eta\}$ 及 $\tilde\Gamma_\eta=\left\{|z|=\dfrac{1}{1+\eta}\right\}$，并设 $z=0$ 及点 b_1、b_2 均在由 $\tilde\Gamma_\eta$所围成的区域 $\tilde D_\eta=\left\{|z|<\dfrac{1}{1+\eta}\right\}$内。以 N_D、N_Γ 分别表示 $W(z)$在 D 内与边界 Γ 上的零点个数，根据辐角原理，有

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_\eta}\arg W(z)=N_D+N_\Gamma.$$

又注意到

$$W(z)=W_1(z)-W_2(z)=\frac{1}{\overline{w_1\left(\dfrac{1}{\bar z}\right)}}-\frac{1}{\overline{w_2\left(\dfrac{1}{\bar z}\right)}}$$

$$=-\frac{\overline{W(\zeta)}}{\overline{w_1(\zeta)w_2(\zeta)}},$$

$$\zeta=\frac{1}{z},\qquad |z|=\left|\frac{1}{\zeta}\right|=1+\eta,$$

因此有

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_\eta}\arg W(z)$$

$$=\frac{1}{2\pi}[\Delta_{\tilde{\Gamma}_\eta}\arg w_1(\zeta)+\Delta_{\tilde{\Gamma}_\eta}\arg w_2(\zeta)-\Delta_{\tilde{\Gamma}_\eta}\arg W(\zeta)]$$

$$=2-N_D,$$

因而可得

$$2N_D+N\Gamma=2.$$

然而从定理中的条件 1°)，2°)，可推出 $2N_D+N\Gamma>2$。此矛盾证明了 $W(z)\equiv 0$，即在 D 内，$w_1(z)\equiv w_2(z)$。

在书[128]31）第三章中，还证明了更一般的一阶非线性一致椭圆型复方程将多连通区域拟共形映射到一些典型区域的同胚解的存在唯一性。

第三章　广义解析函数

本章将讨论平面区域上一阶标准形式的椭圆型方程组

(0.1)　　$u_x - v_y = au + bv + f,\ u_y + v_y = cu + dv + g,$

其中 a, b, c, f, g 都是区域 D 内点 (x, y) 的已知函数，满足条件

(0.2)　$a, b, c, d, d, f, g \in L_p(\bar{D})$，或 $L_{p,2}(\bar{D})$（当 D 无界）这里 $p(2<p<\infty)$ 是正常数。记 $z = x + iy$，$w = u + iv$，那么方程组 (0.1) 可写成复形式

(0.3)　$w_{\bar{z}} = Aw + B\bar{w} + C,$

此处 $w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(w_x + iw_y)$，$A = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib)$，$B = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib)$，$C = \frac{1}{2}(f + ig)$。由书[128]31)第一章引理1.1引理1.2可知对于平面区域 D 上最一般的一阶线性一致椭圆型方程组

(0.4)　$\begin{cases} a_{11}u_x + a_{12}u_y + b_{11}v_x + b_{12}v_y = a_1u + b_1v + c_1, \\ a_{21}u_x + a_{22}u_y + b_{21}v_x + b_{22}v_y = a_2u + b_2v + c_2, \end{cases}$

其中系数 a_{jk}，$b_{jk}(i, k = 1, 2) \in W_p^1(D)$，$a_j, b_j, c_j\ (i = 1, 2) \in L_p(\bar{D})$ 或 $L_{p,2}(\bar{D})$，$2<p<\infty$，都可转化为形如(0.3)标准形式的复方程(0.3)。本章只限于讨论在条件：A, B, $C \in L_p(\bar{D})$ 或 $L_{p,2}(\bar{D})$ 即在条件(0.2)之下复方程(0.3)在区域 D 内的解，这种解 $w(z)$ 一般不是在区域 D 内连续可微的古典解，而是在 D 内的正则解或广义解，即：$w(z)$ 在 D 内几乎处处满足复方程(0.3)，又 $w(z)$ 在 D 内每一点的邻域内连续，且属于 $D_{\bar{z}}$，或在 D 内除了一离散点集外的每一点邻域内连续且属于 $D_{\bar{z}}$，以后在没有特别说明时，所指(0.3)在区域 D 内的解都是指正则解。从后面的定理

1.8 可知：此正则解在 D 内是 Hölder 连续的。

本章中，我们将给出复方程(0.3)于区域 D 内的解相应于解析函数的一些性质，同时指出在某些情形下，对应于解析函数的性质不再成立。我们还要研究这种解的一些积分表示，并讨论复方程(0.3)的某些边值问题的可解性，这里主要讨论 Riemann 边值问题与 Riemann-Hilbert 边值问题。

§1 广义解析函数与解析函数的关系

如果复方程(0.3)中的 $C=0$，则得复方程

(1.1) $w_{\bar{z}}=Aw+B\bar{w}$,

它在区域 D 内的正则解就称为第一类广义解析函数(И.Н.Bekya 在书[117]1)第三章。§1 中把此解叫作广义解析函数)，而 L.Bers 在书[14]1)中把此解叫作第一类准解析函数，而把复方程

(1.2) $w_{\bar{z}}=g(z)\bar{w}_{\bar{z}}$, $g(z)=-\dfrac{F(z)+iG(z)}{F(z)-iG(z)}$ 于 D 内的正则解

叫作第二类准解析函数，在上式中 $F(z)$，$G(z)$都是复方程(1.1)（令 $A=B=0$，当$z\bar{\in}D$)于全平面 E 上的解，使得 $F(z)\to 1$，$G(z)\to i$，当 $z\to\infty$。正如前面所指出：以后常把复方程(1.1)在 D 内的正则解简称为(1.1)的解，并且把上述第一类广义解析函数简称为广义解析函数。

一、广义解析函数的第一类表示式

广义解析函数的第一类表示式，也称为相似原理。

定理 1.1 (相似原理) 设 $w(z)$是区域 D 内除一孤立点集 D_* 外的广义解析函数，即$w(z)$是(1.1)于 $D-D_*$ 内的正则解，则 $w(z)$可表示成

(1.3) $w(z)=\Phi(z)e^{\varphi(z)}$,

(1.4) $$\varphi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\sigma_\zeta = Tg,$$

其中 $\Phi(z)$是 $D—D_*$ 内的解析函数，而

(1.5) $$g(z) = \begin{cases} A(z) + B(z)\overline{w}(z)/w(z), \text{ 当 } w(z) \neq 0, \ z \in D, \\ A(z) + B(z), \text{ 当} w(z) = 0, \ z \in D \text{及} z \overline{\in} D_*. \end{cases}$$

证 注意到 $|g(z)| \leq |A(z)| + |B(z)|$，可知 $g(z) \in L_p(\overline{D})$ 或 $L_{p,2}(\overline{D})$，$p > 2$。根据第一章定理 3.3，得 $\varphi(z) \in C_\alpha(E)$，$\alpha = 1 - 2/p$。由于 $\varphi_{\bar z} = g(z)$，从第一章定理 4.4，知 $e^{\varphi(z)} \in W_p^1(D)$ 及 $(e^{\varphi(z)})_{\bar z} = e^{\varphi(z)}\varphi_{\bar z} = g(z)e^{\varphi(z)}$。由于 $w(z)$是复方程 (1.1) 在区域 $D - D_*$ 内的正则解，故 $w \in D_{\bar z}$当$z \in D - D_*$，由第一章定理5.1，$\Phi(z) = w(z)e^{-\varphi(z)} \in D_{\bar z}$，当 $z \in D - D_*$，而

$$\Phi_{\bar z} = (w_{\bar z} - wg)e^{-\varphi} = (Aw + B\overline{w} - wg)e^{-\varphi} = 0$$

在 $D - D_*$ 上几乎处处成立。根据第一章定理2.4，可知 $\Phi(z)$在 $D - D_*$ 内解析

易知 $D - D_*$ 是区域，如果 $w(z)$是复方程(1.1)于 D 内的正则解，则 $\Phi(z)$是 D 内的解析函数。

从(1.5)式，并根据第一章定理 3.3，可得 $\varphi(z) = Tg$ 满足下列估计式：

(1.6) $$|\varphi(z)| \leq M_p L_{p,2}(|A| + |B|, \overline{D})$$

(1.7) $$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq M_p L_{p,2}(|A| + |B|, \overline{D})|z_1 - z_2|^\alpha,$$

(1.8) $$|\varphi(z)| \leq M_p L_{p,2}(|A| + |B|, \overline{D})|z|^{-\alpha} \text{当} |z| \geq R > 1,$$

其中 $\alpha = 1 - 2/p$，M_p 是仅与 $p(>2)$有关的常数。如果区域 D 有界，(1.6)－(1.8)各式中的 $L_{p,2}$ $(|A| + |B|$，$\overline{D})$ 均代以 L_p $(|A| + |B|, \overline{D})$，又(1.8)式中的 M_p 还与 R 有关。在此情形下，当 $z \to \infty$ 时，$\varphi(z) \to 0$，(1.8)式必然成立。

由表示式(1.3)可得 $w(z)/\Phi(z) = e^{\varphi(z)}$，这里 $e^{\varphi(z)}$是一个不等于 0 的连续函数。因而可导出广义解析函数与解析函数许多相似的性质：广义解析函数 $w(z)$在 D 内的零点与 $\Phi(z)$ 相同，又

$w(z)$的孤立奇点（可去奇点、极点与本性奇点）也与$\Phi(z)$相同，而且非为 0 的广义解析函数的零点和极点都是孤立的，它们的级也都是正整数. 对于广义解析函数，也有关于本性奇点的 Weierstrass 定理，即

定理 1.2 设 z_0 是广义解析函数的一本性奇点，又 c 为一复常数，则存在一点列$\{z_k\}$，使得：当 $z_k\to z_0$ 时，有 $w(z_k)\to c$.

证 我们可选取点列 $\{z_k\}$ 使得：当 $z_k\to z_0$ 时，有 $\Phi(z_k)\to ce^{-\varphi(z_0)}$. 由于

$$|w(z_k)-c|\leqslant|\Phi(z_k)||e^{\varphi(z_k)}-e^{\varphi(z_0)}|+|\Phi(z_k)e^{\varphi(z_0)}-c|,$$

可知：当 $z_k\to z_0$ 时，有$w(z_k)\to c$.

此外，从解析函数关于零点的唯一性定理推出广义解析函数的相应定理.

定理 1.3 如果广义解析函数 $w(z)$在区域 D 内的无穷点集上等于 0，又此无穷点集在 D 内至少有一凝聚点，则在 D 内，$w(z)\equiv 0$.

类似地，我们使用定理 1.1 及关于解析函数的 Liouville 定理，可得广义解析函数的如下结果：

定理 1.4 设 $w(z)$ 是在全平面 E 上连续且有界的广义解析函数，如果有一固定点 $z_0\in E$，使得 $w(z_0)=0$，则 $w(z)\equiv 0$，当 $z\in E$.

证 从定理的条件，可知$w(z)$的表示式(1.3)中的 $\varphi(z)$ 在全平面连续且有界，因而 $\Phi(z)$是整函数，且 $\Phi(z_0)=0$，这可导出$\Phi(z)=0$,当$z\in D$，故 $w(z)\equiv 0$，当 $z\in D$.

用同样的方法还可证明以下结果：

定理 1.5 设 $w(z)$是全平面上连续且有界的广义解析函数，则 $w(z)$可表示成

$$(1.9)\quad w(z)=ce^{\varphi(z)},\ \varphi(z)=T(A+B\bar{w}/w),$$

其中 c 是一复常数. 上式中的函数 $w(z)$称为广义常数.

进一步，如果(1.3)式中的$\Phi(z)$是多项式或有理函数，则称(1.3)式中的$w(z)$为广义多项式，或广义有理函数。并且，若广义解析函数$w(z)$在全平面上的有穷点连续，又在点∞附近满足：$w(z)=O(|z|^n)$，这里n是非负整数，则$w(z)$是n次幂的广义多项式。

注意到广义解析函数$w(z)$表示式(1.3)中的函数$\varphi(z)$在全平面上连续，因而若在简单闭曲线Γ上，$w(z)$无零点与极点，则有

(1.10) $\Delta_\Gamma \arg w(z)=\Delta_\Gamma \arg\Phi(z)+\Delta_\Gamma \mathrm{Im}\varphi(z)=\Delta_\Gamma \arg\Phi(z)$,

故对广义解析函数，辐角原理仍成立，即

定理 1.6 设$w(z)$是区域D内的广义解析函数，又Γ为D内一简单闭曲线，它和它的内部都属于D，而$w(z)$在Γ上没有零点和极点，则有下列公式：

(1.11)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{w'(z)}{w(z)}dz=N-P,$$

其中N，P分别是$w(z)$在Γ内的零点个数与极点个数，几级零点（极点）算几个。

使用上述定理，也可得到关于广义解析函数的Rouche定理。

但应指出：对于复方程(1.1)于区域D非为常数的解$w(z)$，保持区域定理一般是不成立的，即$w(D)$可以不是一个区域，又Riemann变换定理也不一定成立。

例如，对一阶复方程

(1.12) $w_{\bar z}=A(z)w$, $A(z)=4(z-2z^2\bar z)$, $z\in E_1|z|<1$,

它就不具有把$E_1:|z|<1$映射到$|w|<1$，且使$z=0$，1保持不变的同胚解。假如不然，以$w(z)$表示复方程(1.12)具有上述性质的解，则由定理1.1，此解$w(z)$可表示成

(1.13) $w(z)=\Phi(z)e^{4(z\bar z-z^2\bar z^2)}$，当$z\in E_1$,

其中 $\Phi(z)$ 是 E_1 上的解析函数，因 $w(0)=0$，可得 $\Phi(0)=0$，又当 $|z|\to 1$ 时，$|w(z)|\to 1$，故 $|\Phi(z)|\to 1$。根据解析函数的最大模原理，可知 $\Phi(z)=e^{i\theta}z^n$，这里 θ 是实常数，n 是正常数。再由辐角原理及 $\Phi(1)=w(1)=1$，便知 $w(z)=z\,e^{4(z\bar z-z^2\bar z^2)}$，并知 $w\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}}>1$，这是不可能的。这不仅说明：对复方程(1.12)，黎曼变换定理是不成立的，而且保持区域定理也不成立。

从定理 1.1 看出：给定区域 $D-D_*$ 内一个广义解析函数 $w(z)$，这里 D_* 是 D 内的孤立点集，那么存在相应于 $w(z)$ 的一个函数 $\Phi(z)$，它在 $D-D_*$ 内解析。反之，如果给定 D 内除了孤立点集 D_* 外是解析的函数 $\Phi(z)$，那么是否在 $D-D_*$ 内存在相应于 $\Phi(z)$ 的广义解析函数 $w(z)$？这个问题的答复是肯定的。

定理 1.7 设 $\Phi(z)$ 为区域 D 内除了孤立点集 D_* 外是解析的函数，$\Phi(z)\neq 0$，则复方程(1.1)存在于 D 内的广义解，即在 $D-D_*$ 内，存在广义解析函数 $w(z)$，使得

$$(1.14)\qquad w(z)=\Phi(z)e^{\varphi(z)},\quad \varphi(z)=Tw,\quad w(z)\in L_{p,2}(\bar D)$$

注意到：$w_{\bar z}=\Phi(z)(e^{\varphi(z)})_{\bar z}=\Phi(z)e^{\varphi(z)}\cdot\varphi_{\bar z}=w(z)\varphi_{\bar z}$，我们只要求解复方程

$$(1.15)\qquad \begin{cases}(e^{\varphi})_{\bar z}=Ae^{\varphi}+B\dfrac{\bar\Phi}{\Phi}(e^{\bar\varphi})，或\\ \varphi_{\bar z}=A+B\dfrac{\bar\Phi}{\Phi}e^{\overline{\varphi(z)}-\varphi(z)},\end{cases}$$

这将留待后面的定理 1.12 就更一般的复方程进行讨论。

二、复方程(0.3)解的第一类表示式

这里，我们讨论较一般的复方程(0.3)并给出此方程解的第一类积分表示式。

定理 1.8 设 $w(z)$ 是复方程(0.3)于区域 D 上的广义解，则

$w(z)$可表成

(1.16) $w(z)=[\Phi(z)+\psi(z)]e^{\varphi(z)}$,

其中$\Phi(z)$是区域D内除去一孤立点集D_*外的解析函数，而$\psi(z)=Tf$，$\varphi(z)=Tg$满足估计式：

(1.17) $L_p[f(z),\ \bar{D}]\leqslant M_1$，$L_p[g(z),\bar{D}]\leqslant M_2$,

(1.18) $C_\alpha[\psi(z),E]\leqslant M_3$，$C_\alpha[\varphi(z),E]\leqslant M_4$,

这里$\alpha=1-2/p$，$M_j(j=1,\cdots,4)$都是依赖于p、$k(L_p[|A|+|B|+|C|,\ \bar{D}]\leqslant k)$及$D$的常数，记作$M_j=M_j(p,k,D)$。为叙述方便，以后均认为$D$是有界区域，如果$D$不是有界区域，只要将条件与结论中的$L_p$改为$L_{p,2}$即可。

证 我们可取$g(z)=A(z)+B(z)\bar{w}/w$，对$w(z)=0$的点，令$g(z)=A(z)+B(z)$，从$A(z)$、$B(z)$的条件与第一章定理3.1,可知(1.17)、(1.18)的第二式成立。再取$f(z)=C(z)e^{-\varphi(z)}$，同理可知(1.17)、(1.18)的第一式成立。而

$$w_{\bar{z}}=\Phi_{\bar{z}}e^{\varphi}+(\Phi+\psi)e^{\varphi}g+fe^{\varphi}=\Phi_{\bar{z}}e^{\varphi}+A\omega+B\bar{\omega}+C.$$

由上式可得：$\Phi_{\bar{z}}=0$，这表明$\Phi(z)$在区域D内除去一孤立点集D_*外是解析的，因此，$w(z)$具有表示式(1.16)。

引理1.1 设$w(z)=T\omega(\omega(z)\in L_p(\bar{D})$，$p>2)$是复方程(0.3)在全平面$E$上的解，则$w(z)$可表示成

(1.19) $w(z)=T\omega=\psi(z)e^{\varphi(z)}$,

其中$\psi(z)$、$\varphi(z)$如定理1.7中所述，满足估计式(1.17)、(1.18)，而$w(z)$也满足如下的估计式：

(1.20) $C_\alpha[w(z),\ E)\leqslant M_5$，$L_p[\omega(z),E]\leqslant M_6$,

这里$\alpha=1-2/p$，$M_j=M_j(p,k,D)$，$j=5,6$,

证 由定理1.8，可知定理中所述的解$w(z)=T\omega$可表示成(1.16)式，其中$\Phi(z)$是整函数，由于$w(\infty)=0$，$\psi(\infty)=0$，故$\Phi(z)\equiv0$,因而有(1.19)式,从(1.17)、(1.18),即知估计式(1.20)成立。

定理 1.9 在定理 1.8 的条件下，复方程(0.3)在区域 D 上的广义解 $w(z)$ 可表示成

$$w(z)=\Phi(z)e^{\varphi(z)}+\psi(z), \tag{1.21}$$

其中 $\Phi(z)$ 是区域 D 除去一孤立点集 D_* 外解析的函数，$\psi(z)=Tf$，$\varphi(z)=Tg$，它们仍满足形如(1.17)、(1.18)的估计式。

证 从后面的引理 1.2，复方程(0.3)具有解 $\psi(z)=Tf$，由引理 1.1，知此解满足(1.17)、(1.18)的第一式。而 $W(z)=w(z)-\psi(z)$ 是复方程(1.1)于 D 内的解，根据定理 1.1，定理 1.8，$W(z)=\Phi(z)e^{\varphi(z)}$，$\varphi(z)=Tg$ 满足(1.17)、(1.18)的第二式，且 $w(z)$ 具有表示式(1.21)

三、复方程(0.3)解的第二类表示式

定理 1.10 设 $w(z)$ 是复方程(0.3)属于 $W_p^1(D)(p>2)$ 的解，则 $w(z)$ 可表示成

$$w(z)=\Phi(z)+\psi(z),\quad \psi(z)=T\omega, \tag{1.22}$$

这里 $\omega(z)=w_{\bar z}\in L_p(\bar D)$，$\Phi(z)$ 为 D 内的解析函数。

证 设 $\omega(z)=w_{\bar z}=Aw+B\bar w+C$，则 $\omega(z)\in L_p(\bar D)$，又因 $[w(z)-\psi(z)]_{\bar z}=w_{\bar z}-\omega(z)=0$，所以 $\Phi(z)=w(z)-\psi(z)=w(z)-T\omega$ 是区域 D 内的解析函数，故有(1.22)式。(1.22)式被称为复方程(0.3)的解的第二类表示式。

引理 1.2 设 $w(z)$ 是复方程(0.3)在有界区域 D 内形如(1.22)的解，其中 $\Phi(z)$ 是在 D 内解析、在 $\bar D$ 上连续的函数，且 $\Phi'(z)\in L_p(\bar D)\,(p>2)$，则 $w(z)$ 与 $\psi(z)=w(z)-\Phi(z)$ 满足估计式：

$$C[w(z),\bar D]\le M_7,\ C_\alpha[\psi(z),\bar D]\le M_8,\ L_p[\omega(z),\bar D]\le M_9, \tag{1.23}$$

这里 $\alpha=1-2/p$，$M_j=M_j(p,k,D,\Phi)$，$j=7,8,9$。

证 将 $w(z)=\Phi(z)+T\omega$ 代入复方程(0.3)，得

$$\psi_{\bar z}=\omega(z)=A\psi+B\bar\psi+F,\quad F=A\Phi+B\bar\Phi+C,$$

注意到 $L_p[A,\ \bar{D}]\leqslant k$，$L_p[B,\bar{D})\leqslant k$，$L_p[F,\bar{D}]\leqslant k_0=k_0(p,\ k,\ D,\ \Phi)$。由引理1.1，可知 $\psi(z)=Tw$，$w(z)=\Phi(z)+\psi(z)$ 满足估计式(1.23)。

引理 1.3 设 $k_1\geqslant 0$ 是任给的常数，若条件 $L_p[C,\ \bar{D}]\leqslant k$ 代以 $L_p[C,\ \bar{D}]\leqslant k_1$，则复方程(0.3)形如 $w(z)=T\omega(\omega(z)\in L_p(\bar{D})$ 的解满足估计式

(1.24) $C_\alpha[w(z),\bar{D})\leqslant M_{10}k_1$，$L_p[\omega(z),\ \bar{D}]\leqslant M_{10}k_1$，其中 $\alpha=1-2/p$，$M_{10}=M_{10}(p,\ k,\ D)>0$。

证 先考虑 $k_1>0$ 的情形，记 $W(z)=w(z)/k_1$，它是复方程

$$W_{\bar{z}}=AW+BW+C/k_1$$

于 D 内的解。注意到 $L_p[C/k_1,\ \bar{D}]\leqslant 1$，根据引理1.1可知 $W(z)=T\left(\dfrac{\omega}{k_1}\right)$满足估计式(1.20)，取 $m_{10}=\max(M_5,M_6,1)$，

即知 $w(z)=T\omega$ 满足估计式(1.24)。如果 $k_1=0$，则将上面讨论的 $k_1>0$ 代以 $\varepsilon>0$，让 $\varepsilon\to 0$，即得(1.24)。

有了上面的准备，就可证明复方程(0.3)具有形如(1.22)的解 $w(z)$，这是复方程(0.3)关于解的第二类表示式的存在定理。

定理 1.11 设 $\Phi(z)$于区域 D 内解析在 $\bar{D}$ 上连续，且 $\Phi'(z)\in L_p(\bar{D})$，$p>2$，则复方程(0.3)具有形如(1.22)的解，而且这样的解是唯一的。

证 先考虑带有参数 $t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的复方程

(1.25) $w_{\bar{z}}-tf(w)=F(z)$，$f(w)=A(z)w+B(z)\bar{w}$，

其中 $F(z)\in L_p(\bar{D})$，$p>2$。容易看出：当 $t=0$ 时，复方程(1.25)具有形如(1.22)的解，即 $w(z)=\Phi(z)+TF$。下面用参数开拓法证明：复方程(1.25)当 $t=1$ 时也具有形如(1.22)的解。

设当 $t=t_0(0\leqslant t_0<1)$时，复方程(1.25)可解（指具有形如(1.22)的解），我们将证明：存在一正常数 δ，它与 t_0 无关，使

得：对$|t-t_0|\leqslant\delta$且$0\leqslant t\leqslant 1$时，复方程(1.25)均可解。为此，将(1.25)写成

(1.26)　$w_{\bar{z}}-t_0f(w)=(t-t_0)f(w)+F(z)$

任取在$\bar{D}$上连续的函数$w_0(z)\in W_p^1(D)$，不妨取$w_0(z)=0$，代入(1.26)的右边w的位置，易知$(t-t_0)f(w_0)+F(z)=F(z)\in L_p(\bar{D})$，因此复方程(1.26)有解$w_1(z)=\Phi(z)+T\omega_1$，这里$\omega_1(z)\in L_p(\bar{D})$。然后将$w_1(z)$代入(1.26)的右边$w$的位置，由于$(t-t_0)f(w_1)+F(z)\in L_p(\bar{D})$，因此复方程(1.26)又有解$w_2(z)=\Phi(z)+T\omega_2$，这里$\omega_2(z)\in L_p(\bar{D})$。这样，经逐次迭代，可得函数序列$\{w_n(z)\}$，它们几乎处处满足：

(1.27)　$w_{n\bar{z}}-t_0f(w_n)=(t-t_0)f(w_{n-1})+F(z),n=1,2,\cdots$

将对应于$n+1$，n的以上复方程相减，可得

(1.28)　$(w_{n+1}-w_n)_{\bar{z}}-t_0f(w_{n+1}-w_n)=(t-t_0)f(w_n-w_{n-1})$，

其中$w_{n+1}(z)-w_n(z)=T(\omega_{n+1}-\omega_n)$，它是复方程(1.28)形如$T\omega=T(\omega_{n+1}-\omega_n)$的解，又注意到：

$$L_p[(t-t_0)f(w_n-w_{n-1}),\bar{D}]\leqslant|t-t_0|kM_{11}L_p(\omega_n-\omega_{n-1},\bar{D}),$$

这里$M_{11}=M_{11}(p,D)<\infty$，使得$C[\omega_n-\omega_{n-1},\bar{D}_1]\leqslant M_{11}L_p[\omega_n-\omega_{n-1},\bar{D}]$，这可由第一章(3,2)式得出。根据(1.24)的第二个估计式，我们有

(1.29)　$L_p[\omega_{n+1}-\omega_n,\bar{D}]\leqslant M_{10}k_1=|t-t_0|kM_{10}M_{11}L_p(\omega_n-\omega_{n-1},\bar{D})$，

选取$\delta=1/2(kM_{10}M_{11}+1)$，则当$|t-t_0|\leqslant\delta$，且$n>N+1\ (>1)$时，就有

$$L_p[\omega_{n+1}-\omega_n,\ \bar{D}]<\frac{1}{2}L_p[\omega_n-\omega_{n-1},\bar{D}]$$

$$\leqslant\frac{1}{2^N}L_p[\omega_1-\omega_0,\bar{D}],$$

又当n，$m>N+1$时，

$$L_p[\omega_n-\omega_m,\bar{D}]<\frac{1}{2^N}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}L_p[\omega_2-\omega_1\bar{D}]=\frac{1}{2^N}L_p[\omega_1-\omega_0,\bar{D}],$$

这表明：当 n, $m\to\infty$时，$L_p[\omega_n-\omega_m,\bar{D}]\to 0$ 由 $L_p(\bar{D})$空间的完备性，可知：存在 $\omega_*(z)\in L_p(\bar{D})$，使得：当 $n\to\infty$ 时，$L_p[\omega_n-\omega_*,\bar{D}]\to 0$。于是可从$\{\omega_n(z)\}$选取子序列在 D 上几乎处处收敛到 $\omega_*(z)$，所以 $w_*(z)=\Phi(z)+T\omega_*$是复方程 (1.25) 当 $|t-t_0|\leqslant\delta$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 时的解。这样，从 $t=0$ 时复方程(1.22)可解能依次推出 $t=\delta$, 2δ, $\cdots$, $\left(\frac{1}{\delta}\right)\delta$, 1 时均可解。特别取(1.25) 中的 $t=1$, $F(z)=C(z)$，即知复方程(0.3)具有形如(1.22)的解。而此解的唯一性由引理 1.3 推出。

其次，我们证明复方程(0.3)具有形如(1.21)的解 $w(z)$，这也是(0.3)关于解的第二类表示式的存在定理。

定理 1.12 设 $\Phi(z)$是区域 D 内除了孤立点集 D_* 外解析的函数，则复方程(0.3)在 D 内具有形如(1.21)的广义解 $w(z)$。

证 首先，根据定理 1.11，复方程(0.3)存在形如 $\psi(z)=Tf$ ($f(z)\in L_p(\bar{D})$)的解，这只要取(1.22)式中的解析函数 $\Phi(z)\equiv 0$ 即达要求。

余下只要证明：复方程 (1.1) 存在形如 (1.14) 即 $W(z)=\omega(z)-\psi(z)=\Phi(z)e^{\varphi(z)}$的解，也就是要证明复方程 (1.15)，即

$$(1.30)\qquad \varphi_{\bar{z}}=A(z)+B(z)\frac{\bar{\Phi}}{\Phi}e^{\overline{\varphi(z)}-\varphi(z)}$$

具有形如 $\varphi(z)=Tg(g(z)\in L_p(\bar{D}))$ 的解。如果 $\Phi(z)\equiv 0$，当 $z\in D$，易知 $\varphi(z)\equiv 0$。因此只要讨论 $\Phi(z)\neq 0$，当 $z\in D$。下面，仍用参数开拓法证明(1.30)具有形如 $\varphi(z)=Tg$ 的解。我们考虑带有参数 $t(p\leqslant t\leqslant 1)$的复方程

(1.31) $\varphi_{\bar{z}} - tB_0(z)e^{\overline{\varphi(z)}-\varphi(z)} = A_0(z)$，$B_0(z) = B(z)\dfrac{\overline{\Phi(z)}}{\Phi(z)}$，

其中 $A_0(z) \in L_p(\bar{D})$，$p>2$。当 $t=0$ 时，易知 (1.31) 具有解 $\varphi(z) = TA_0$。如果 $t=t_0(0\leqslant t_0<1)$时，复方程(1.31)有解 $\varphi(z) = Tg(g(z)\in L_p(\bar{D}))$，那么可证：存在正常数$\delta$使得当 $|t-t_0|\leqslant\delta$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 时，(1.31)均具有形如 $\varphi(z)=Tg(g(z)\in L_p(\bar{D}))$的解。事实上，将(1.31)改写成

(1.32) $\varphi_{\bar{z}} - t_0B_0(z)e^{\bar{\varphi}-\varphi} = (t-t_0)B_0(z)e^{\bar{\varphi}-\varphi} + A_0(z)$，

任取函数 $\varphi_0(z)\in C_\alpha(\bar{D})$，$\alpha=1-2/p$，不妨取 $\varphi_0(z)=0$，代入上式右边 φ 的位置，易知$(t-t_0)B_0(z)e^{\bar{\varphi}_0-\varphi_0}+A_0(z)\in L_p(\bar{D})$，因此(1.32)有解 $\varphi_1(z)=Tg_1$，$g_1(z)\in L_p(\bar{D})$。仿照定理1.11的证明，使用迭代法，可求得函数序列$\{\varphi_n(z)\}$，$\varphi_n(z)=Tg_n\in C_\alpha(\bar{D})$，它们几乎处处满足复方程

(1.33) $\varphi_{n\bar{z}} - t_0B_0(z)e^{\bar{\varphi}_n-\varphi_n} = (t-t_0)B_0(z)e^{\bar{\varphi}_{n-1}-\varphi_{n-1}} + A_0(z)$，

$$n=1,2,\cdots$$

将对应于 $n+1$，n 的以上复方程相减，得

(1.34) $(\varphi_{n+1}-\varphi_n)_{\bar{z}} - t_0B_0[(z)e^{\bar{\varphi}_{n+1}-\varphi_{n+1}} - e^{\bar{\varphi}_n-\varphi_n}]$

$$= (t-t_0)B_0(z)[e^{\bar{\varphi}_n-\varphi_n} - e^{\bar{\varphi}_{n-1}-\varphi_{n-1}}],$$

注意到 $e^{\bar{\varphi}_{n+1}-\varphi_{n+1}} - e^{\bar{\varphi}_n-\varphi_n} = \int_{\bar{\varphi}_n-\varphi_n}^{\overline{\varphi_{n+1}}-\varphi_{n+1}} e^\zeta d_\zeta$，则知 $|e^{\bar{\varphi}_{n+1}-\varphi_{n+1}} - e^{\bar{\varphi}_n-\varphi_n}|\leqslant \int_{\bar{\varphi}_n-\varphi_n}^{\overline{\varphi_{n+1}}-\varphi_{n+1}}|d\zeta|\leqslant 2|\varphi_{n+1}-\varphi_n|$，而 $L_p[(t-t_0)B_0(z)(e^{\bar{\varphi}_n-\varphi_n} - e^{\bar{\varphi}_{n-1}-\varphi_{n-1}})$，$\bar{D}]\leqslant 2|t-t_0|kC[\varphi_n-\varphi_{n-1},\bar{D}]\leqslant 2|t-t_0|kM_{11}L_p(g_n-g_{n-1}$，$\bar{D}]$使用类似于(1.24)的估计式，我们得到

$$L_p[g_{n+1}-g_n,\bar{D}]\leqslant 2|t-t_0|kM_{11}M_{12}L_p[g_n-g_{n-1},\bar{D}],$$

这里 $M_{12}=M_{12}(p,D)$，其余的证明与定理1.11相仿。因而可得 $g(z)\in L_p(\bar{D})$，使得 $\varphi(z)=Tg$ 是复方程(1.30)的解，故复方程(0.3)在 D 内具有形如(1.21)的解 $w(z)=\Phi(z)e^{\varphi(z)}+\psi(z)$

$\psi(z)=Tf$，$\varphi(z)=Tg$，$f(z)$、$g(z)\in L_p(\bar{D})$，$p>2$。

四、广义解析函数与 Bers 意义下的微商

由定理 1.7 或定理 1.12，可知复方程(0.3)在全平面E上存在形如下的解：

(1.35) $F(z)=1\cdot e^{Tg_1}$，$G(z)=i\cdot e^{Tg_2}$，

这里 $g_1(z)$、$g_2(z)\in L_{p,2}(E)$，这两个函数都是广义常数，而一般的广义常数为

(1.36) $w(z)=ce^{Tg}=c_1e^{Tg_1}+ic_2e^{Tg_2}$，$c=c_1+ic_2$，

其中C_1、c_2都是实常数，这是因为当 $z\to\infty$ 时，Tg_1、Tg_2、$Tg\to 0$，$ce^{Tg}\to c$，$c_1e^{Tg_1}+ic_2e^{Tg_2}=c_1+ic_2=c$。我们可证

(1.37) $\operatorname{Im}[\overline{F(z)}G(z)]>0$，当 $z\in E$。

先证 $\operatorname{Im}[\overline{F(z)}G(z)]\neq 0$，当 $z\in E$。假如不然，存在点 $z_0\in E$，使 $\operatorname{Im}[\overline{F(z_0)}G(z_0))=0$，即

$$\begin{vmatrix}\operatorname{Re}F(z_0) & \operatorname{Im}F(z_0)\\ \operatorname{Re}G(z_0) & \operatorname{Im}G(z_0)\end{vmatrix}=0,$$

因而存在不全等于 0 的实常数c_1与c_2，使 $c_1F(z_0)+c_2G(z_0)=0$，因 $c_1+ic_2\neq 0$，这与定理 1.4 矛盾。又当 $z\to\infty$时，$\operatorname{Im}[F(z)G(z)]=\operatorname{Im}[1\cdot i]=1>0$，由 $\operatorname{Im}[\overline{F(z)}G(z)]$在 E 上的连续性，即知 (1.37) 式成立。因为 $F(z)$、$G(z)$都是复方程(0.3)的解，即几乎处处有

$$F_{\bar z}=AF+B\bar F,\quad G_{\bar z}=AG+B\bar G,$$

注意到条件(1.37)，则可从以上方程组解出

(1.38) $A(z)=\dfrac{\bar FG_{\bar z}-\bar GF_{\bar z}}{\bar FG-F\bar G}$，$B(z)=\dfrac{GF_{\bar z}-FG_{\bar z}}{\bar FG-F\bar G}$。

因此，给定 $A(z)$，$B(E)\in L_{p,2}(E)$，便可由复方程(0.3)求出唯一的解组$(F(z)$，$G(z))$，$F(z)$、$G(z)\in C_\alpha(E)$($\alpha=1-2/p$)，$F_{\bar z}$、$G_{\bar z}\in L_{p,2}(E)$。反之，由$[F(z),G(x)]$可按公式(1.38)确定 $A(z)$、

$B(z)$。也就是说，在$(A,\ B)$与$(F,\ G)$间建立了一一对应的关系，L.Bers 称上述函数组$(F,\ G)$为生成对。

由于有条件(1.37)，则任给一复变函数$w(z)$，必存在两个实函数$\varphi(z)$、$\psi(z)$，使得

$$w(z)=\varphi(z)F(z)+\psi(z)G(z),$$

L.Bers 在点z_0按生成对$(F,\ G)$的微商定义为

$$(1.39)\quad \dot{w}(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{w(z)-\varphi(z_0)F(z)-\psi(z_0)G(z)}{z-z_0}$$

对于$w_{\bar z}=\frac{1}{2}[(u_x-v_y)+i(u_y+v_x)]=0$，它是 Cauchy-Riemann 方程组的复形式，$F(z)=1$，$G(z)=i$，此时(1.39)式中的$\dot{w}(z_0)=w'(z_0)$，它就是复变函数$w(z)$在点z_0的微商。

下面证明关于$\dot{w}(z)$存在与复方程(0.3)之间关系的一个定理

定理 1.13 复变函数$w(z)$在点z_0按生成对$(F(z),\ G(z)$的微商$)\dot{w}(z_0)$存在的充要条件是：在点z_0，以下等式成立

$$(1.40)\quad w_{\bar z}-A(z)w-B(z)\bar{w}=0,$$

其中$A(z)$，$B(z)$如(1.38)式所示。

证 先证必要性。记

$$(1.41)\quad W(z)=w(z)-\varphi(z_0)F(z)-\psi(z_0)G(z),$$

从$\dot{w}(z_0)$存在的定义(1.39)，知$\dot{w}(z_0)=W'(z_0)$，由此推知：$W(z)$的实部、虚部在点z_0满足 Cauchy-Riemann 条件，即$W_{\bar z}(z_0)=0$。而(1.41)式还可写成

$$(1.42)W(z)=\begin{vmatrix} w(z) & w(z_0) & \overline{w(z_0)} \\ F(z) & F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G(z) & G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} F(z_0) & \overline{(Fz_0)} \\ G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix},$$

则$W_{\bar z}(z_0)=0$可写成

$$
(1.43)\qquad \begin{vmatrix} w_{\bar{z}}(z_0) & w(z_0) & \overline{w(z_0)} \\ F_{\bar{z}}(z_0) & F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G_{\bar{z}}(z_0) & G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix} = 0,
$$

即(1.40)在点 z_0 成立。

其次证明充分性. (1.40)式在点 z_0 成立可写成 (1.43)，也就是有 $W_{\bar{z}}(z_0)=0$，这表明 $W(z)$ 的实部与虚部在点 z_0 满足 Cauchy-Riemann 条件，因而有 $W'(z_0)=0$，即 $w(z_0)$ 存在。

另外，如果 $\varphi(z)$、$\psi(z)$ 在区域 D 内具有连续偏微商，从 $w(z)$ 存在可得 $W_{\bar{z}}(z)=0$，也就是

$$
(1.44)\qquad W_{\bar{z}}=F\varphi_{\bar{z}}+G\psi_{\bar{z}}=0,\ \text{即}\ F\left(\frac{\omega+\bar{\omega}}{2}\right)_{\bar{z}}+G\left(\frac{\omega+\bar{\omega}}{2i}\right)_{\bar{z}}=0,
$$

从上式便可得到(1.2)，即 $\omega(z)=\varphi(z)+i\psi(z)$ 在区域 D 内是第二类准解析函数。

§2 Green 恒等式与广义Cauchy 公式

一、Green 恒等式

对于复方程(0.3)，即

$$
(2.1)\qquad w_{\bar{z}}=A(z)w+B(z)\bar{w}+C(z),
$$

它的共轭复方程可写成

$$
(2.2)\qquad w'_{\bar{z}}=-A(z)w'-\overline{B(z)w'}+D(z),
$$

这里 $A(z)$、$B(z)$、$C(z)$、$D(z)\in W_p^1(D)$。如果函数 $w(z)$、$w'(z)$ 在 $\bar{D}=D+\Gamma$ 上连续，且属于 $W_p^1(D)(p>2)$，这里 D 的边界 $\Gamma\in C^1$，由第一章公式(3.30)，就有

$$
\frac{1}{2i}\int_\Gamma w(z)\,w'(z)dz=\iint_D(ww')_{\bar{z}}d\sigma_z=
$$

$$= \iint_D [ww'_{\bar z} + w'w_{\bar z}]d\sigma_z$$

$$= \iint_D [w(w'_{\bar z} + Aw' + \bar B\bar w') + w'(w_{\bar z} - Aw - B\bar w) - \bar B w\bar w' + B\bar w w']d\sigma_z,$$

于是有

(2.3) $\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2i}\int_\Gamma w(z)w'(z)\,dz\right] = \mathrm{Re}\iint_D [wD + w'C]d\sigma_z,$

特别对广义解析函数，$C=0$，$D=0$，则有

(2.4) $\mathrm{Re}\ \frac{1}{2i}\int_\Gamma w(z)w'(z)dz = 0,$

这就是所谓的 Green 等式。如果 $w(z)$在区域 D 内解析，直到边界 Γ 连续，此时可取共轭复方程$w'_{\bar z}=0$，1 与 i 都是它的解，代入(2.4)即得

(2.5) $\int_\Gamma w(z)dz = 0,$

而 Γ 可取为 D 内任一条逐段光滑的简单闭曲线，它的内部完全属于 D。这就是解析函数的 Cauchy 定理。

二、广义解析函数的基本核

今取 $\Phi_1(z) = \dfrac{1}{2(t-z)}$，$\Phi_2(z) = \dfrac{1}{2i(t-z)}$，依照定理 1.7，可知存在 $\varphi_1(t,z) = Tg_1 - Tg_1|_{z=t}$. $\varphi_2(t,z) = Tg_2 - Tg_2|_{z=t}$, $g_1(z)$, $g_2(z) \in L_{p,2}(\bar D)$，使得

(2.6) $X_1(z,t) = \dfrac{1}{2(t-z)}e^{\varphi_1(t,z)}, X_2(z,t) = \dfrac{1}{2i(t-z)}e^{\varphi_2(t,z)}$ 是

复方程(1.1)的解。根据公式 (1.6) - (1.8)，我们有

(2.7) $|\varphi_j(z,t)| \leqslant M'_p$, $|\varphi_j(z,t)| \leqslant M'_p|z-t|^\alpha$,

(2.8) $|\varphi_j(z,t)| \leqslant M'_p(|z|^{-\alpha} + |t|^{-\alpha})$，当$|z|$, $|t| \geqslant R > 1$,

(2.9) $|\varphi_j(z_1,t) - \varphi_j(z_2,t)| \leqslant M'_p|z_1 - z_2|^\alpha$, $j=1,2$,

(2.10) $|\varphi_1(z,t)-\varphi_2(z,t)|\leqslant M''_p|z-t|^{\alpha}$,

其中 $\alpha=1-2/p$，$M'_p=M_pL_{p,2}(|A|+|B|,\ \bar{D})$，$M''_p=2M_pL_{p,2}(|B|,\bar{D})$. 函数组$X_1(z,t)$, $X_2(z,t)$称为带有极点t的基本广义解析函数组，它们在全平面 E 上除点 t 外都是 Hölder 连续的，且几乎处处满足复方程

(2.11) $X_{1\bar{z}}=A(z)X_1+B(z)\bar{X}_1$，$X_{2\bar{z}}=A(z)X_2+B(z)\bar{X}_2$.

现在我们构造两个函数：

$$
(2.12)\quad \begin{cases} \Omega_1(z,t)=X_1(z,t)+iX_2(z,t)=\dfrac{1}{2(t-z)}[e^{\varphi_1(z,t)}+e^{\varphi_2(z,t)}], \\ \Omega_2(z,t)=X_1(z,t)-iX_2(z,t)=\dfrac{1}{2(t-z)}[e^{\varphi_1(z,t)}-e^{\varphi_2(z,t)}], \end{cases}
$$

按照(2.7)、(2.10)得知

$$
(2.13)\quad \Omega_1(z,t)-\frac{1}{t-z}=O(|z-t|^{-\frac{2}{p}}),\ \Omega_2(z,t)=O\left(|z-t|^{-\frac{2}{p}}\right),
$$

又当固定 $z\neq\infty$ 和 $t\to\infty$时，有

(2.14) $\Omega_1(z,t)=O(|t|^{-1})$，$\Omega_2(z,t)=O(|t|^{-1})$.

如果复方程(2.1)中的 $B(z)\equiv0$，容易得知 $\varphi_1(z,t)=\varphi_2(z,t)$，因此 $\Omega_2(z,t)\equiv0$，上面所得的函数组 $\Omega_1(z,t)$，$\Omega_2(z,t)$ 称为(1.1)或广义解析函数的基本核，它们是唯一确定的，并容易看出它们满足

(2.15) $\Omega_{1\bar{z}}+A(z)\Omega_1+B(z)\bar{\Omega}_2=0, \Omega_{2\bar{z}}+A(z)\Omega_2+B(z)\bar{\Omega}_1=0$.

三、广义 Cauchy 积分公式

仿照前面求复方程(1.1)的基本广义解析函数组 $X_1(z,t)$、$X_2(z,t)$那样，我们可求得共轭复方程

(2.16) $w'_{\bar{z}}=-A(z)w'-\overline{B(z)}\,\bar{w}'$

的基本解组 $X_1'(z,t)$、$X_2'(z,t)$，下面先建立 $X_j(z,t)$ 与 $X_j'(z,t)$ $(i=1,2)$之间的关系，然后将给出广义解析函数相应于解析函数的 Cauchy 公式即广义 Cauchy 公式。

设 D 是一有界的多连通区域，其边界 Γ 是有限条逐段光滑的简单闭曲线组成，又点 $t\in D$，而 $\Gamma_\varepsilon=\{|z-t|=\varepsilon\}$是一个小圆周，$\varepsilon$ 为足够小的正数，Γ_ε 及其内部都在 D 中。对广义解析函数 $w(z)$与 $X_j'(z,t)$在 Γ与Γ_ε 所围的区域上使用 Green 等式(2.4)，有

$$Re\frac{1}{2i}\int_\Gamma w(z)X_k'(z,t)dz=\int_\Gamma w(z)X_k'(z,t)dz-\overline{w(z)}\,\overline{X_k'(z,t)}\,d\bar{z}$$

$$=\int_{\Gamma_\varepsilon} w(z)X_k'(z,t)\,dz-\overline{w(z)\,X_k'(z,t)}d\bar{z},\quad k=1,2.$$

将上面第二式($k=2$)乘以 i，与第一式($k=1$)相加，便得

$$\int_\Gamma w(z)\,\Omega_1'(z,t)\,dz-\overline{w(z)\Omega_2'(z,t)d_{\bar z}}$$

$$=\int_{\Gamma_\varepsilon} w(z)\,\Omega_1'(z,t)\,dz-\overline{w(z)\Omega_2'(z,t)}d\bar{z},$$

其中 $\Omega_1'(z,t)$、$\Omega_2'(z,t)$是共轭复方程(2.16)的基本核，当 $\varepsilon\to 0$，并使用估计式(2.13)，可得

$$\int_\Gamma w(z)\Omega_1'(z,t)dz-w(z)\Omega_2'(z,t)d\bar{z}=-2\pi i w(t).$$

如果 $t\overline{\in} D+\Gamma$，或 $t\in\Gamma$，我们也可得到相应的公式，即上式右边代以 0，或 $-\beta\pi w(t)$，而 $\beta\pi$ 是边界 Γ 在点 t 的内角，$0<\beta\leqslant 2$，于是，我们有以下广义 Cauchy 公式：

$$(2.17)\qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1'(t,z)w(t)\,dt-\overline{\Omega_2'(t,z)w(t)}d\bar{t}$$

$$=\begin{cases}w(z), & \text{当 } z\in D,\\ 0, & \text{当 } z\in \overline{D},\\ \dfrac{\beta}{2}w(z), & \text{当 } z\in\Gamma.\end{cases}$$

其次，要证明：$\Omega_j(z,t)$与 $\Omega_j'(z,t)$ $(j=1,2)$ 满足关系式

(2·18) $\Omega_1(z,\ \zeta)=-\Omega_1'(\zeta,\ z)$，$\Omega_2(z,\ \zeta)=-\overline{\Omega_2(\zeta,\ z)}$，

其中 $\Omega_1(z,\ \zeta)=X_1+iX_2$，$\Omega_2(z,\zeta)=X_1-iX_2$，也就是

$$
(2\cdot19)\quad \begin{cases} X_1'(z,\ \zeta)=-\dfrac{1}{2}[X_1(\zeta,z)+\overline{X_1(\zeta,z)}]+\dfrac{1}{2i}[X_2(\zeta,z)+\overline{X_2(\zeta,z)}] \\ X_2'(z,\zeta)=-\dfrac{1}{2}[X_2(\zeta,z)-\overline{X_2(\zeta,z)}]-\dfrac{1}{2i}[X_1(\zeta,z)-\overline{X_1(\zeta,z)}], \end{cases}
$$

这里 ζ 为平面上固定的点，事实上，记 $\Gamma_\varepsilon=\{|z-\zeta|=\varepsilon\}$，$\Gamma_{\frac{1}{\varepsilon}}=\left\{|z-\zeta|=\frac{1}{\varepsilon}\right\}$，易知 $X_1(z,\ \zeta)$、$X_2(z,\zeta)$ 是复方程（1,1）在闭区域 $\varepsilon\leqslant|z-\zeta|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$ 上的连续解，由公式（2.17)有

$$
(2.20)\quad x_k(z,\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\frac{1}{\varepsilon}}} X_k(t,\ \zeta)\Omega_1'(t,z)dt-\overline{X_k(t,\zeta)\Omega_2'(t,z)}\,d\bar{t}
$$

由（2.6)、(2.7)，与（2,13)，(2,14)，当 $|t-\zeta|=\varepsilon$，有

$$
X_1(\zeta,t)=\frac{1}{2(t-\zeta)}\left[1+O\left(\varepsilon^{1-\frac{2}{p}}\right)\right],
$$

$$
X_2(\zeta,t)=\frac{1}{2i(t-z)}\left[1+O\left(\varepsilon^{1-\frac{2}{p}}\right)\right],
$$

又当 $|t-\zeta|=\frac{1}{\varepsilon}$，有

$$
X_k(t,\zeta)\Omega_1'(t,z)=O(\varepsilon^2),\quad X_k(t,\zeta)\Omega_2'(t,\zeta)=O(\varepsilon^2).
$$

在（2.20）式中让 $\varepsilon\to0$，便得

$$
(2.21)\quad X_1(z,\zeta)=-\frac{1}{2}[\Omega_1'(\zeta,z)+\overline{\Omega_2'(\zeta,z)}],
$$

$$X_2(z,\zeta)=\frac{-1}{2i}[\Omega_1'(\zeta,z)-\overline{\Omega_2'(\xi,z)}],$$

由上式即得(2.18)。

这样一来，由（2.18）式，可将广义 Cauchy 公式（2.17）写成

$$(2.22)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,t)w(t)dt-\Omega_2(z,t)\overline{w(t)dt}$$

$$=\begin{cases} w(z), & 当 z\in D, \\ 0, & 当 z\overline{\in}\bar{D}, \\ \frac{\beta}{2}w(z), & 当 z\in\Gamma. \end{cases}$$

如果 $A(z)=B(z)=0$，那么 $\Omega_1(z,t)\equiv\frac{1}{t-z}$，$\Omega_2(z,t)\equiv 0$，此时，（2.22）成为解析函数的 Cauchy 公式

$$(2.23)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{w(t)}{t-z}dt=\begin{cases} w(z), & 当 z\in D, \\ 0, & 当 z\overline{\in}\bar{D}, \\ \frac{\beta}{2}w(z), & 当 z\in\Gamma \end{cases}$$

如果区域 D 是无界区域，其边界 $\Gamma\in C^1$，又在点∞的邻域内，$w(z)=O(|z|^{-1})$，则广义 Cauchy 公式（2.22）仍然成立，其中 Γ 的方向与前面所述的相反。

此外，如果 $w(z)$ 是复方程（2.1）在区域 D 内的正则解，且直到边界 Γ 连续，使用（2.3）式并取 $D=0$，依照前面的方法，可证更一般的积分公式

$$(2.24)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,t)w(t)dt-\Omega_2(z,t)\overline{w(t)}\,d\bar{t}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_D[\Omega_1(z,\zeta)C(\zeta)+\Omega_2(z,\zeta)\overline{C(\zeta)}]d\sigma_\zeta$$

$$= \begin{cases} w(z), & \text{当 } z\in D, \\ 0, & \text{当 } z \overline{\in} \bar{D}, \\ \dfrac{\beta}{2}w(z), & \text{当 } z\in\Gamma. \end{cases}$$

四、用解析函数的积分表示广义解析函数

如果在有界角区域 $\bar{D}$ 外，复方程（1.1）的系数 $A(z)=B(z)=0$，我们可将（1.1）的基本核写成 $\Omega_1(z, t, D)$、$\Omega_2(z,t,D)$，这样的核称为复方程（1.1）关于区域 D 的标准核。

当 $t\in D$，则由（2.15），在 $\bar{D}$ 外

$$[\Omega_j(z,t,D)]_{\bar{z}}=0,\quad j=1,2,$$

即 $\Omega_j(z,t,D)$（$j=1$，2）在 $\bar{D}$ 外是 z 的解析函数，且在点∞等于 0。由于（2.18），有

$$(2.24)\quad \Omega_1(z,t,D)=-\Omega_1'(t,z,D),\quad \Omega_2(z,t,D)=-\overline{\Omega_2'(t,z,D)},$$

这表明 $\Omega_1'(t,z,D)$、$\overline{\Omega_2'(t,z,D)}$ 在 $\bar{D}$ 外是 z 的解析函数，且在点∞等于 0。

设 $w(z)$ 是复方程（1.1）在 D 内的正则解，且在 $\bar{D}=D+\Gamma$ 上连续，从（2.22），当 $z\in D$，有

$$(2.25)\quad w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,t,D)w(t)dt-\Omega_2(z,t,D)\overline{w(t)}\,d\bar{t}.$$

现在引入 Γ 外的解析函数

$$(2.26)\quad \Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{w(t)}{t-z}dt,$$

从书[128]23)第四章 §1、以 $\Phi^+(t)$、$\Phi^-(t)$分别表示 $\Phi(z)$ 从 D 内与 $\bar{D}$ 外当 z 趋于 $t\in\Gamma$ 的边界极限值，$\Phi^+(t)$、$\Phi^-(t)$都在Γ上连续，且由 Сохочкий 公式

$$(2.27)\quad w(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t),\quad t\in\Gamma$$

定义 $\Phi(t)$为 $\Phi(z)$ 在 Γ 上的函数，则 $\Phi(z)$在 D 外解析，直到

边界Γ连续，又$\Phi(\infty)=0$. 根据广义 Cauchy 公式，有

$$(2.28)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,t,D)\Phi^-(t)dt-\Omega_2(z,t,D)\overline{\Phi^-(t)}d\bar{t}=0.$$

将 (2.27) 代入(2.25)，并记$\Phi(t)=\Phi^+(t)$，得到

$$(2.29)\quad w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,t,D)\Phi(t)dt-\Omega_2(z,t,D)\overline{\Phi(t)}d\bar{t}.$$

现在将上式右边在区域$D_\varepsilon=D-\{|z-\zeta|\leqslant\varepsilon\}$上应用 Green 等式，这里$\zeta$为$D$内的固定点，$\varepsilon$为足够小的正常数，我们有

$$w(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\iint_{D_\varepsilon}\{[\Omega_1(z,\zeta,D)]_{\bar\zeta}\Phi(\zeta)+[\Omega_2(z,\zeta,D)]_\zeta\cdot$$

$$\overline{\Phi(\zeta)}]\}d\sigma_\zeta+\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\zeta|=\varepsilon}\Omega_1(z,\zeta,D)\Phi(\zeta)d\zeta,\right.$$

$$\left.-\Omega_2(z,\zeta,D)\overline{\Phi(\zeta)}d\bar\zeta\right\},$$

注意到 (2.13)，从上式即得

$$(2.30)\quad w(z)=\Phi(z)+\iint_D[\Gamma_1(z,\zeta,D)\Phi(\zeta)$$

$$+\Gamma_2(z,\zeta,D)\Phi(\zeta)]d\sigma_\zeta,$$

其中

$$\Gamma_1(z,\zeta,D)=\frac{1}{\pi}[\Omega_1(z,\zeta.D)]_{\bar\zeta},$$

$$\Gamma_2(z,\zeta,D)=\frac{1}{\pi}[\Omega_2(z_1,\zeta,D)]_\zeta.$$

根据 (2.15)，(2.18)，有

$$(2.31)\quad \begin{cases}[\Omega_1(z,\zeta,D)]_{\bar\zeta}+A(\zeta)\Omega_1(z,\zeta,D)+\overline{B(\zeta)}\Omega_2(z,\zeta,D)=0,\\ [\Omega_2(z,\zeta,D)]_\zeta+\overline{A(\zeta)}\Omega_2(z,\zeta,D)+B(\zeta)\Omega_1(z,\zeta.D)=0\end{cases}$$

即

$$
(2.32)\quad \begin{cases} \Gamma_1(z,\zeta,D)=\dfrac{-1}{\pi}[A(\zeta)\Omega_1(z,\zeta,D) \\ \qquad\qquad +\overline{B(\zeta)}\,\Omega_2(z,\zeta,D)], \\ \Gamma_2(z,\zeta,D)=\dfrac{-1}{\pi}[\overline{A(\zeta)}\Omega_2(z,\zeta,D) \\ \qquad\qquad +B(\zeta)\Omega_1(z,\zeta,D)]. \end{cases}
$$

§3　广义解析函数的一些性质

本节中，我们将给出广义解析函数的一些性质，广义解析函数的最大模原理：广义解析函数的凝聚原理，广义解析函数的幂级数表示式即广义幂级数及广义对称原理等.

一、最大模原理

先证明广义解析函数一般的最大模原理：

定理 3.1　设 $w(z)$是在闭区域 $\bar{D}=D+\Gamma$ 上连续的广义解析函数，Γ 为区域 D 的边界，则

$$(3.1)\quad |w(z)|\leqslant M_1\max_{t\in\Gamma}|w(t)|,$$

$$(3.2)\quad 1\leqslant M_1=M_1(p,k,D)\leqslant e^{4M_pk},$$

这里 $L_p[A(z),\ \bar{D}]\leqslant k<\infty$，$L_p[B(z),\ \bar{D}]\leqslant k$，$M_p$ 为(1.6)式中的常数.

证　由定理 1.1,有 $w(z)=\Phi(z)e^{\varphi(z)}$, 以 $t_0\in\Gamma$ 表示使解析函数 $\Phi(z)$达到最大模的点，则

$$|w(z)|\leqslant|\Phi(t_0)||e^{\varphi(t)-\varphi(t_0)+\varphi(z)}\leqslant M_1\max_{t\in\Gamma}|w(t)|,$$

其中 M_1 满足 (3.2) 式.

其次，设复方程 (1.1) 的系数满足某些条件，可证 (1.1) 在 D 内的连续解满足严格的最大模原理，即 (3.1) 式中的常数 $M_1=1$.

定理 3·2 设复方程（1.1）的系数 $A(z)$、$B(z)$在区域 D 内有连续偏微商，且在 D 内满足条件

$$(3.3) \qquad |B_z + 2\bar{A}B| \leqslant ReA_z + 2B\bar{B},$$

则（1.1）在 $\bar{D} = D + \Gamma$ 上的连续解 $w(z)$ 满足严格的最大模原理，即

$$(3.4) \qquad |w(z)| \leqslant \max_{t\in\Gamma} |w(t)|, \text{ 当 } z \in D.$$

证 如果$|w(z)|$恒等于常数，则（3.4）式成立。现在讨论$|w(z)|$在 D 内不恒等于常数，并只要证明在 D 内任一点 z_0，$|w(z_0)|$不能达到最大值。假如不然，$|w(z)|$ 在 $z_0 \in D$ 达到最大值，易知$|w(z_0)| \neq 0$，由此推知在点 z_0 的一个邻域内，$|w(z)| \neq 0$，而 $u(z) = \ln|w(z)|^2$在此邻域内达到最大值 $u(z_0)$。注意到在 z_0 的这一邻域内，

$$u_z = (\ln w\bar{w})_z = \frac{w_z}{w} + \frac{\bar{w}_z}{\bar{w}},$$

$$(3.5) \qquad u_{z\bar{z}} = \text{Re}\,[2\ln w]_{\bar{z}z} = \text{Re}\left[2\left(\frac{w_{\bar{z}}}{w}\right)_z\right]$$

$$= 2\text{Re}\left[A + B\frac{\bar{w}}{w}\right]_z = 2\text{Re}\left[A_z + B_z\frac{\bar{w}}{w} + B\frac{\bar{w}_z}{w} - B\frac{w_z\bar{w}}{w^2}\right]$$

$$= 2\text{Re}\left[A_z + B_z\frac{\bar{w}}{w} + \bar{A}B\frac{\bar{w}}{w} + |B|^2 - B\frac{\bar{w}}{w}u_z + \left(\bar{A}B + |B|^2\frac{w}{\bar{w}}\right)\frac{\bar{w}}{w}\right] = 2\text{Re}\left[-B\frac{\bar{w}}{w}u_z + A_z + 2|B|^2 + (B_z + 2\bar{A}B)\frac{\bar{w}}{w}\right],$$

由条件（3.3），从上式得

$$(3.6)\quad \begin{cases} u_{z\bar{z}}+2\mathrm{Re}\left[B\dfrac{\bar{w}}{w}u_z\right]\geqslant 2[\mathrm{Re}A_z+2|B|^2- \\ -|B_z+2\bar{A}B|]\geqslant 0, \end{cases}$$

根据第四章引理 1.3 关于二阶椭圆型方程解的极值原理，满足条件（3.6）的二阶方程（3.5）的解 $u(z)=\ln|w(z)|^2$ 不能在点 z_0 达到最大值。此矛盾证明了（3.4）式成立。

有了上述定理，我们可以导出关于广义解析函数的 Schwarz 引理。

定理 3.3 设 $w(z)$ 是在圆 D: $|z-z_0|\leqslant R$（$<\infty$）上连续的广义解析函数，又 $w(0)=0$，则在 D 上，有

$$(3.7)\quad |w(z)|\leqslant\frac{M_1}{R^n}|z-z_0|^n\max_{t\in\Gamma}|w(t)|,$$

这里 $\Gamma=\{|z-z_0|=R\}$，n 是 $w(z)$ 在零点 $z=0$ 的级，又 $M_1=M_1(p,k,D)\geqslant 1$。如果 $A(z)$、$B(z)e^{-2ni\arg(z-z_0)}$ 还满足定理 3.2 中 $A(z)$、$B(z)$ 所满足的条件，则可取（3.7）式中的常数 $M_1=1$。

证 根据定理 1.1，在 D 上，有

$$w(z)=\Phi(z)e^{\varphi(z)}=(z-z_0)^n\Psi(z)e^{\varphi(z)}=(z-z_0)^nW(z),$$

其中 $\Psi(z)$ 是 D 内的解析函数，而 $W(z)$ 是复方程

$$W_{\bar{z}}=A(z)W+B(z)e^{-2ni\arg(z-z_0)}\overline{W(z)},$$

于 D 内的解，再由定理 3.1 定理 3.2，可得公式（3.7）。

二、广义凝聚原理

定义 3.1 设 $\{w_n(z)\}$ 是复方程(1.1)于区域 D 内的解序列，如果能从 $\{w_n(z)\}$ 选取子序列在 D 内闭（D内任一闭集）一致收敛到（1.1）于 D 内的解 $w(z)$，则称 $\{w_n(z)\}$ 在 D 内是列紧的。

现在叙述和证明广义解析函数序列的凝聚原理。

定理 3.4 如果复方程（1.1）在区域 D 内的连续解序列 $\{w_n(z)\}$ 在 D 内闭一致有界，则 $\{w_n(z)\}$ 在 D 内列紧。

证 从定理1.1及公式（1.6），（1.7），可知

(3.8) $w_n(z)=\Phi_n(z)e^{\varphi_n(z)}$，$\varphi_n(z)=Tg_n$，

(3.9) $|\varphi_n(z)|\leqslant M_pL_p\ (|A|+|B|,\ \bar{D})$，

(3.10) $|\varphi_n(z_1)-\varphi_n(z_2)|\leqslant M_pL_{p,2}(|A|+|B|,\ \bar{D})|z_1-z_2|^{\alpha}$.

这里 $\alpha=1-2/p, n=1,\ 2,\cdots$。从以上两式看出函数序列 $\{\varphi_n(z)\}$ 在 D 上一致有界和同等连续，因此解析函数序列$\{\Phi_n(z)\}$在 D 内闭一致有界。根据解析函数序列的凝聚原理（见书[53]、[128] 23)），$\{\Phi_n(z)\}$也在 D 内闭一致有界和同等连续，于是可从$\{w_n(z)\}$选取子序列在 D 内闭一致收敛到函数 $w(z)=\Phi(z)e^{\varphi(z)}$，这里 $\Phi(z)$ 与 $\varphi(z)=Tg$ 分别是$\{\Phi_n(z)\}$与$\{\varphi_n(z)\}$所选子序列的极限函数，并且可知 $Tg=T\left(A+B\dfrac{\overline{w}}{w}\right)$，因而 $w(z)$ 是（1.1）于 D 内的解。

定理3·5 在定义3·1中所述的函数序列$\{w_n(z)\}$在区域 D 内列紧的充要条件是：相应于（1.3）的表示式（3.8）中的解析函数序列$\{\Phi_n(z)\}$在 D 内是列紧的。

证 如定理3.4的证明，函数序列$\{\varphi_n(z)\}$在 D 上一致有界和同等连续，因而可从$\{\varphi_n(z)\}$选取子系列在 $\bar{D}$ 上一致收敛到连续函数 $\varphi(z)$，这表明，从$\{w_n(z)\}$在 D 内的列紧性可推出$\{\Phi_n(z)\}$在 D 内的列紧性，反之也对。

其次，我们将证明广义解析函数序列更一般的凝聚原理，简称广义凝聚原理。

定理3·6 设

(3.11) $\lim\limits_{n\to\infty}L_p[A_n(z)-A(z),\bar{D}]=0$,

$$\lim_{n\to\infty}L_p[B_n(z)-B(z),\ \bar{D}]=0$$

又 $w_n(z)$是复方程

(3.12) $w_{n\bar{z}} = A_n(z)w_n + B_n(z)\bar{w}_n$

于区域 D 内的连续解，$n=1,2,\cdots$。如果$\{w_n(z)\}$在 D 内闭一致有界，则$\{w_n(z)\}$在 D 内是列紧的。

证 复方程 (3.12) 在 D 内的连续解 $w_n(z)$ 可表示成(3.8)，其中 $\Phi_n(z)$ 在 D 内解析 $\varphi_n(z) = Tg_n$，$g_n(z) = A_n(z) + B_n(z)\dfrac{\overline{w_n(z)}}{w_n(z)}$。由定理的条件，$L_p(|A_n|+|B_n|, \bar{D})(n=1, 2, \cdots)$ 是有界的，记其上确界为 $M_2<\infty$。相仿于 (3.9)、(3.10)，有

(3.13) $|\varphi_n(z)| \leqslant M_p M_2$,

(3.14) $|\varphi_n(z_1) - \varphi_n(z_2)| \leqslant M_p M_2 |z_1 - z_2|^\alpha$.

因此解析函数序列$\{\Phi_n(z)\}$在 D 内闭一致有界，故可从$\{\Phi_n(z)\}$、$\{\varphi_n(z)\}$分别选取子序列$\{\Phi_{nk}(z)\}$、$\{\varphi_{nk}(z)\}$在 D 内闭一致收敛到 $\Phi(z)$、$\varphi(z)$，这里 $\Phi(z)$ 在 D 内解析，$\varphi(z) = Tg$，$g(z) = A(z) + B(z)\dfrac{\bar{w}}{w}$，$w(z) = \Phi(z)e^{\varphi(z)}$。由此可知 $w(z)$ 是复方程 (1.1) 于 D 内的连续解（参看书[128]31）第四章定理2.1的证明)。

定理 3.7 在 (3.11) 的条件下，对于复方程 (1.1) 于区域 D 内的任一连续解 $w(z)$，都可找到复方程 (3.12) 于 D 内的连续解 $w_n(z)$，而当 $n\to\infty$ 时，$w_n(z)$ 在 D 内闭一致收敛到 $w(z)$。

证 由定理 1.1，有 $w(z)=\Phi(z)e^{\varphi(z)}$，这里 $\Phi(z)$ 在 D 内解析。根据定理 1.7，可求得复方程 (3.12) 于 D 内的连续解 $w_n(z)=\Phi(z)e^{\varphi_n(z)}$，它符合定理中的要求。

三、广义幂级数

设 z_0 为一有穷点，$w_{2n}(z,z_0)$、$w_{2n+1}(z,z_0)$ 是分别对应于 $(z-z_0)^n$、$i(z-z_0)^n$ ($|n|$为整数)的广义幂函数，即

(3.15) $w_{2n}(z,z_0) = (z-z_0)^n e^{\varphi^*_{2n}(z)}$,

$$w_{2n+1}(z, z_0) = i(z - z_0)e^{\varphi^*_{2n+1}(z)}$$

（如果n）$\geqslant 0$，这是广义多项式），其中

$$(3.16)\quad \begin{cases} \varphi^*_{2n}(z, z_0) = \varphi_{2n}(z) - \varphi_{2n}(z_0), \\ \varphi^*_{2n+1}(z, z_0) = \varphi_{2n+1}(z) - \varphi_{2n+1}(z_0), \\ \varphi_{2n}(z) = T\left(A + B\dfrac{\overline{w_{2n}}}{w_{2n}}\right), \varphi_{2n+1}(z) = T\left(A + B\dfrac{\overline{w_{2n+1}}}{w_{2n+1}}\right), \end{cases}$$

它们的存在性可由定理 1.7 推出。从（1.7）式，可知

$$max[\varphi_{2n}(z),\ \varphi_{2n+1}(z)] \leqslant M_p L_{p,2}(|A| + |B|)|z - z_0|^{\alpha} = \varphi_*(z),$$

于是有

$$(3.17)\quad e^{-\varphi_*(z)} \leqslant \left|\frac{w_n(z, z_0)}{(z - z_0)^n}\right| \leqslant e^{\varphi_*(z)},$$

我们把上述幂函数 $w_n(z, z_0)(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 组成的级数

$$(3.18)\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n w_n\ (z, z_0)$$

称为第一类广义幂级数，它与解析函数论中的幂级数

$$(3.19)\qquad \sum_{n=-x}^{+\infty}\ (c_{2n} + ic_{2n+1})(z - z_0)^n$$

相对应。

现在我们证明如下的广义 Abel 定理：

定理 3·8 广义幂级数（3·18）与幂级数（3·19）有相同的收敛圆环，并且在此圆环内，级数（3·18）绝对收敛且一致收敛。特别，如果级数

$$(3·20)\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n w_n(z,\ z_0)$$

在点 $z_1(\neq z_0)$ 收敛，则它在圆：$|z - z_0| < |z_1 - z_0|$内绝对收敛且一致收敛。如果级数（3.20）在点 $z_2(\neq z_0)$发散，则它在$|z - z_0| > |z_2 - z_0|$发散。

证 将广义幂级数（3.18）分解成

$$(3.21)\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n w_n(z,z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n w_n(z,z_0) + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n w_n(z,z_0),$$

上式右边两级数分别与幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}(c_{2n}+ic_{2n+1})(z-z_0)^n$，

$\sum_{n=-1}^{-\infty}(c_{2n}+ic_{2n+1})(z-z_0)^n$ 相对应。注意到估计式（3.17），使用解析函数中幂级数的一些性质与Abel定理，便可得到本定理中所述的全部结论。

用$w(z)$表示广义幂级数(3.20)在收敛圆内的和函数，如定理3.4的证明，由于

$$(3.22)\qquad W_m(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n w_n(z,z_0)$$

在收敛圆内闭一致收敛到$w(z)$，而$w(z)$是复方程（1.1）于此收敛圆内的解。容易理解：级数（3.20）的系数$c_n(n=0,1,2,\cdots)$可由下式计算得出

$$(3.23)\quad c_{2n}+ic_{2n+1} = \lim_{z\to z_0}\frac{w(z)-\sum_{k=0}^{n-1}[c_{2k}w_{2k}(z,z_0)+c_{2k+1}w_{2k+1}(z,z_0)]}{(z-z_0)^n}$$

其中$n=0,1,2,\cdots$，$c_0+ic_1=w(z_0)$。

其次，我们介绍另一类广义幂级数。设$w(z)$是复方程（1.1）于圆$D=\{|z-z_0|<R\}$内的解，直到边界$\Gamma=\{|z-z_0|=R\}$上连续，于是可得D内的解析函数

$$(3.24)\quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{w(t)}{t-z}dt = \sum_{k=0}^{\infty}(c_{2k}+ic_{2k+1})(z-z_0)^k,$$

其中 $c_k(k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$ 都是实常数，它们可由下式确定：

$$(3.25)\quad c_{2k}+ic_{2k+1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{w(t)}{(t-z_0)k+1}dt,\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots。$$

容易看出：函数

$$(3.26)\quad \tilde{w}_n(z)=\sum_{k=0}^{n}c_k w_k(z,z_0)$$

是复方程（1.1）于 D 内的解，上式中的 $w_k(z,z_0)\quad(k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$ 都是如（3.15）式所示的广义幂函数。由（2.25）与（2.29），上述函数 $w(z)$ 与 $\tilde{w}_n(z)$ 可表示成

$$(3.27)\quad w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,\ t,\ D)\ w(t)dt-\Omega_2(z,t,D)\overline{w(t)}d\bar{t},$$

$$(3.28)\quad \tilde{w}_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,t,D)\Phi_n(t)-\Omega_2(z,t,\ D)\overline{\Phi_n(t)}\,d\bar{t},$$

其中

$$(3.29)\quad \Phi_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\ (c_{2k}+ic_{2k+1})\ (z-z_0)^{k}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\tilde{w}_n(z)}{t-z}dt,$$

这要设复方程（1.1）的系数 $A(z)$、$B(z)$在 D 外等于 0，并使用解析函数在 D 外的 Cauchy 定理。将（3.27）与（3.28）相减，有

$$(3.30)\quad |w(z)-\tilde{w}_n(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}(|\Omega_1(z,t,\ D)|+|\Omega_2(z,t,D)|)$$

$$\cdot|w(t)-\Phi_n(t)||dt|\leqslant M_3(D_*)L_1(w-\Phi_n,\Gamma),\ z\in D_*,$$

这里 D_* 表示 D 内的任一闭子集。由于（3.24）中的级数是 $w(t)$的 Fourier 级数，因此当 $n\to\infty$ 时，有 $L_1(w-\Phi_n,\ \Gamma)\to0$，这样，我们就证明了以下结果：

定理 3.9 设 $w(z)$是复方程（1.1）在 $D=\{|z-z_0|<R\}$ 内

的（正则）解，则 $w(z)$ 可在 D 内展成如下的广义 Taylor 级数

$$(3.31)\quad w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n w_n\ (z,\ z_0),$$

以上级数在 D 内闭一致收敛，$w_n(z,\ z_0)$ 是广义幂函数，如（3.15）式所示。

其次，考虑圆环 $D=\{R_1<|z-z_0|<R_2\}$，边界为 $\Gamma_1=\{|z-z_0|=R_1\}$，$\Gamma_2=\{|z-z_0|=R_2\}$，类似于（3.24），设 $w(z)$ 是复方程（1.1）于 D 内的（正则）解，且在 $\bar{D}$ 上连续，则有

$$(3.32)\quad \Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{w(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\omega(t)}{t-z}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(c_{2k}+ic_{2k+1})\ (z-z_0)^k,$$

其中 $c_{2k}+ic_{2k+1}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_2}\frac{w(t)}{(t-z_0)^{k+1}}dt,\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots,$

$$c_{2k}+ic_{2k+1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{w(t)}{(t-z_0)^{k+1}}dt,\ k=-1,\ -2,\cdots,$$

并且可将 $w(z)$ 展成在 D 内闭一致收敛的广义 Laurent 级数（也称第二类广义幂级数）

$$(3.33)\quad w(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k w_k(z,\ z_0),$$

此处 $w_k(z,\ z_0)$ 是前面所述的广义幂函数。正如定理 3.8，级数（3.33）与（3.32）有相同的收敛圆环。

应当指出：L.Bers 也建立了一种广义幂级数理论（见[14]）。

四、广义对称原理

先介绍广义解析函数的连续开拓，我们要证明以下结果。

定理 3.10 设 D_1 和 D_2 是两个不相交的区域，它们以逐段光滑的 Jordan 弧 γ（不包含端点）作为公共边界，又 $w_1(z)$、$w_2(z)$ 分别是复方程（1.1）在 D_1、D_2 上的（正则）解，依次在 $D_1+\gamma$、$D_2+\gamma$ 上连续，则函数

$$(3.34)\quad w(z)=\begin{cases} w_1(z), & \text{当 } z\in D_1+\gamma, \\ w_2(z), & \text{当 } z\in D_2 \end{cases}$$

是（1.1）于 $D_1+D_2+\gamma$ 上的正则解。

证 任取弧 γ 上的一点 z_0，以 z_0 为心作小圆周 $\Gamma=\{|z-z_0|=\varepsilon\}$，使它及其内部属于 $D_1+D_2+\gamma$，使用广义 Cauchy 公式（2.22），并与解析函数相应定理的证明相仿，有

$$(3.35)\quad w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,t)w(t)dt-\Omega_2(z,t)\overline{w(t)}d\bar{t},$$

$$|z-z_0|<\varepsilon.$$

经直接验证，便知 $w(z)$ 是(1.1)于 Γ 内的正则解。由于点 z_0在 γ 上的任意性，可知 $w(z)$ 是（1.1）在 $D_1+D_2+\gamma$ 上的正则解。

使用上述定理，可证关于广义解析函数的对称原理：

定理 3.11 设 D 是上半平面的一区域，它的一部分边界是实轴上的线段 γ，以 D_* 表示 D 关于实轴对称的区域，又 $w(z)$ 是复方程（1.1）于 D 内的正则解，直到边界 γ 连续，且 $Re w(z)=0$，当 $z\in\gamma$，则函数

$$(3.36)\quad W(z)=\begin{cases} w(z), & \text{当 } z\in D+\gamma, \\ -\overline{w(\bar{z})}, & \text{当 } z\in D_* \end{cases}$$

是复方程

$$(3.37)\quad W_{\bar{z}}=A_*(z)W+B_*(z)W,\quad A_*=\begin{cases} A(z), \\ \overline{A(\bar{z})}, \end{cases}$$

$$B_* = \begin{cases} B(z), & z \in D, \\ \overline{B(\bar{z})}, & z \in D_*. \end{cases}$$

于 $D+D_*+\gamma$ 上的正则解.

证 注意到条件 $\mathrm{Re}\,w(z)=0$, 即 $w(z)=-\overline{w(z)}$, 当 $z\in\gamma$, 这表明 $W(z)$ 在 γ 是连续的. 由定理 3.10, 便知 $W(z)$ 是 (3.37) 于 $D+D_*+\gamma$ 上的正则解.

定理 3.12 设 D 是圆 $|z|<1$ 内的一个区域, 它的边界的一部分是 $|z|=1$ 上的一段圆弧 γ, 以 D_* 表示 D 关于 γ 的对称区域又 $w(z)$ 是复方程 (1.1) 于 D 内的正则解, 直到边界 γ 连续, 且 $\mathrm{Re}\,w(z)=0$, 当 $z\in\gamma$, 则函数

$$(3.38)\quad W(z)=\begin{cases} w(z), & \text{当 } z\in D+\gamma, \\ -\overline{w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, & \text{当 } z\in D_* \end{cases}$$

是复方程

$$(3.39)\quad W_{\bar{z}}=A_*(z)W+B_*(z)\overline{W},\quad A_*=\begin{cases} A(z), \\ -\frac{1}{\bar{z}^2}\overline{A\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \end{cases}$$

$$B_*=\begin{cases} B(z), & \text{当 } z\in D, \\ -\frac{1}{\bar{z}^2}\overline{B\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, & \text{当 } z\in D_* \end{cases}$$

于 $D+D_*+\gamma$ 上的正则解.

证 当 $z\in\gamma$, $\mathrm{Re}\,w(z)=0$, 即 $w(z)=-\overline{w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, 这表示 $W(z)$ 在 γ 上连续. 通过直接验证, 可知 $W(z)$ 是(3.39) 于 D, D_* 上的正则解, 再由定理3.10, 便得本定理的结论.

§ 4　广义Cauchy型积分与 Haseman 边值问题

本节中，我们先介绍广义 Cauchy 型积分，然后利用此公式讨论广义解析函数 Riemann 边值问题、Haseman 边值问题等的可解性。

一、广义 Cauchy 型积分

设 Γ 是有限条逐段光滑的 Jordan 曲线，$\varphi(t)$是 Γ 上的可积函数，我们就称积分

$$(4.1)\quad w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(z,\ t)\varphi(t)\,dt - \Omega_2(z,\ t)\ \overline{\varphi(t)\,dt}$$

为广义 Cauchy 型积分，其中 $\Omega_1(z,\ t)$、$\Omega_2(z,t)$ 是如(2.12)式所示广义解析函数的基本核。根据（2.13），通过直接验算，可证（4.1）式中的函数 $w(z)$是复方程（1.1）于 Γ 外的正则解，而且在点∞附近，有 $w(z)=O(|z|^{-1})$.

设 ζ 为 Γ 上一点，且 Γ 上包含点 ζ 于其内的一段弧 $\gamma\in C^1$，又 $\varphi(t)\in C_\alpha(\gamma)$，$0<\alpha<1$。由于（2.13）式，仿照解析函数情形下 Сохоцкий 公式的导出（见书[128]23）第四章 §1），可得

$$(4.2)\quad w^+(\zeta) = \frac{1}{2}\varphi(\zeta) + w(\zeta),\quad w^-(\zeta) = -\frac{1}{2}\varphi(\zeta) + w(\zeta),\qquad \zeta\in\gamma,$$

其中

$$(4.3)\quad w(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(\zeta,t)\varphi(t)\,dt - \Omega_2(\zeta,\ t)\ \overline{\varphi(t)}\,d\bar{t},$$

上式右边第一个积分是按 Cauchy 主值意义下的积分，而第二个积分是通常意义下的积分，如果复方程（1.1）的系数$A(z)\equiv B(z)$

$\equiv 0$，此时（2.13）式成为 $\Omega_1(z,\ t)=\frac{1}{t-z}$，$\Omega_2(z,\ t)=0$，而（4.2）便是 Cauchy 型积分情形下的公式

$$
(4.4)\quad \begin{cases} w^+(\zeta)=\frac{1}{2}\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-\zeta}dt, \\ w^-(\zeta)=-\frac{1}{2}\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-\zeta}dt,\ \zeta\in\Upsilon. \end{cases}
$$

我们还可将（4.2）式改写成

$$
(4.5)\quad w^+(t)-w^-(t)=\varphi(t),\ w^+(t)+w^-(t)=2w(t),\ t\in\Upsilon.
$$

如果 D 是有界区域，其边界 $\Gamma\in C^1$，又函数 $w(z)$ 是复方程（1.1）于 D 内的正则解，在 $\bar{D}=D+\Gamma$ 上连续，且 $w(t)=\varphi(t)$，当 $t\in\Gamma$，则由广义 Cauchy 公式（2.22），当 $z\bar{\in}\bar{D}$，有

$$
(4.6)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,t)\varphi(t)dt-\Omega_2(z,\ t)\overline{\varphi(t)}d\bar{t}=0,
$$

于是 $w^-(\zeta)=0$，当 $\zeta\in\Gamma$，而（4.2）的第二式成为

$$
(4.7)\quad \varphi(\zeta)-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(\zeta,t)\varphi(t)dt-\Omega_2(\zeta,\ t)\overline{\varphi(t)}d\bar{t}=0,
$$

$$
\zeta\in\Gamma.
$$

如果 $w(z)$ 是复方程（1.1）于 D 外点集 D^- 的正则解，直到边界 Γ 连续，又 $w(\infty)=0$，$w(t)=\varphi(t)$，$t\in\Gamma$，则对 D 内任一点 z，（4.6）式都成立，此时（4.2）的第一式成为

$$
(4.8)\quad \varphi(\zeta)+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(\zeta,t)\varphi(t)dt-\Omega_2(\zeta,\ t)\overline{\varphi(t)}d\bar{t}=0,
$$

以上所述条件是必要条件．反之，也不难证明所述条件也是充分的．这样，就得到如下的结果：

定理 4.1 设 $\varphi(t)\in C_\alpha(\Gamma)$，$0<\alpha<1$，那么等式（4.6）或

(4.7) 成立的充要条件是：$w(z)$是复方程 (1.1) 于D内的正则解，在$\bar{D}$上连续，且$w(t)=\varphi(t)$，$t\in\Gamma$。又等式 (4.6) 或 (4.8) 式成立的充要条件是：$w(z)$是 (1.1) 于D外点集D^-上的正则解，在$\bar{D}^-$上连续，$w(\infty)=0$，且$w(t)=\varphi(t)$，$t\in\Gamma$。

此外，我们还可证明广义 Cauchy 型积分的如下性质。

定理 4.2 设D是一有界区域，其边界$\Gamma\in C^1$，又$\varphi(t)\in C_\alpha(\Gamma)$，$0<\alpha<1$，则由广义 Cauchy 型积分(4.1) 所确定的函数$w(z)\in C_\beta(\bar{D})$，$\beta=\min(\alpha,1-2/p)$。

证 根据 (2.30)，我们可将广义 Cauchy 型积分写成

$$(4.9)\quad w(z)=\Phi(z)+\iint_D[\Gamma_1(z,\ \zeta,\ D)\ \Phi(\zeta)+\Gamma_2(z,\ \zeta,\ D)\ \overline{\Phi(\zeta)}]d\sigma_\zeta,$$

其中$\Phi(z)$ 如 (2.26) 式所示，即

$$(4.10)\qquad \Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)}{t-z}dt,$$

由 Cauchy 积分的性质（见[128]23) 第四章定理1.3)，可知$\Phi(z)\in C_\alpha(\bar{D})$，由于$w(z)$ 满足 (4.5) 的第一式，$\Phi(z)$ 也满足条件

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t),\ t\in\Gamma,$$

因此$w(z)-\Phi(z)$在全平面连续，在点∞等于0，又$w(z)-\Phi(z)$，是复方程

$$[w(z)-\Phi(z)]_{\bar{z}}=A(z)[w-\Phi]+B(z)\overline{[w-\Phi]}$$
$$+A(z)\Phi+B(z)\bar{\Phi}$$

于D^+、D^-上的解，且在点∞等于0。仿照定理1.11的证法，可证此解具有如下的形式

$$w(z)-\Phi(z)=T\omega,\ \omega(z)\in L_{p,2}(E).$$

因此

$$w(z)-\Phi(z)\in C_\beta(\bar{D}),\quad \beta=\min\ (\alpha,\ 1-2/p),$$

这样，我们便得到 $w(z)\in C_\beta(\bar{D})$。

二、 Riemann 边值问题

广义 Cauchy 型积分（4.1）给出了特殊的 Riemann 边值问题的解，其边界条件如（4.5）的第一式所示。所谓广义解析函数的 Riemann 边值问题，即求复方程（2.1）于 $D^+(=D)$、D^- 上的分片正则解 $w(z)$，使它直到边界 Γ 连续，且满足边界条件

(4.11) $\quad w^+(t)=G(t)w^-(t)+g(t),\ t\in\Gamma,$

这里 Γ 是 $N+1$ 条逐段光滑的闭曲线 $\Gamma_0,\ \Gamma_1,\cdots,\Gamma_N$，而 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_N$ 在 Γ_0 所围的有界区域内，D^+ 是以 Γ 为边界的有界区域，D^- 是 $\overline{D}$ 在全平面的余集，$w(z)$ 在点$\infty(\in D^-)$ 连续，又设 $G(t)$、$g(t)$ 满足条件

(4.12) $\quad G(t)\neq 0,\ G(t)$、$g(t)\in C_\alpha(\Gamma),\ 0<\alpha<1.$

我们简称上述边值问题为**问题 R**。

首先，我们简化此边值问题 R，即使用定理1.11，求出复方程（2.1）于全平面上的正则解，

(4.13) $\quad \psi(z)=T\omega,\ \omega(z)\in L_{p,2}(E),$

设

(4.14) $\quad W(z)=w(z)-\psi(z),$

则求解复方程（2.1）之问题 R 的解 $w(z)$ 转化为求解复方程

(4.15) $\quad W_{\bar z}=A(z)W+B(z)\overline{W(z)}$

适合如下边界条件的解 $W(z)$：

(4.16) $\quad W^+(t)=G(t)W^-(t)+g_*(t),\ t\in\Gamma,$

这里

(4.17) $\quad g_*(t)=g(t)+[G(t)-1]\psi(t),\ t\in\Gamma.$

因此下面不妨只讨论复方程（1.1）适合边界条件（4.11）之边值问题 R，而 $g(t)\equiv 0$ 的问题 R 记作**问题 R_0**。

正如解析函数的情形那样，先求解析函数满足齐次边界条件：

$$X^{+}(t)=G(t)X^{-}(t),\quad t\in\Gamma \tag{4.18}$$

的标准解

$$X(z)=\begin{cases}e^{\Gamma(z)}/\Pi(z), & 当\ z\in D^{+},\\ z^{-k}e^{\Gamma(z)}, & 当\ z\in D^{-},\end{cases} \tag{4.19}$$

这里

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\ln t^{-k}\Pi(t)G(t)}{t-z}dt, \tag{4.20}$$

而 $K=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma}argG(t)$，$\Delta_{\Gamma}argG(t)$ 表示沿按正向转动一周后 $argG(t)$ 的增量，$k_j=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_j}\arg G(t)$，$j=0,1,\cdots,N$，$\Pi(z)=(z-z_1)^{\kappa_1}\cdots(z-z_N)k^N$，$z_j$ 是由 Γ_j 所围有界区域 D_j 内的一点，$j=1,\cdots,N$. 容易看出 $\lim\limits_{z\to\infty}\Gamma(z)=\Gamma(\infty)=0$，又当 $k<0$ 时，$X(z)$ 在点 ∞ 有 $-k$ 级极点。

将标准解 $X(z)$ 代入齐次边界条件（4.18），再去除非齐次边界条件（4.11），得

$$\begin{cases}\dfrac{w^{+}(t)}{X^{+}(t)}=\dfrac{w^{-}(t)}{X^{-}(t)}+\dfrac{g(t)}{X^{+}(t)}, & t\in\Gamma,\\ 即\ W^{+}(t)-W^{-}(t)=\varphi(t),\quad \varphi(t)=\dfrac{g(t)}{X^{+}(t)}, & t\in\Gamma,\end{cases} \tag{4.21}$$

其中函数 $W(z)=w(z)/X(z)$ 应是复方程

$$W_{\bar{z}}=A(z)W(z)+B(z)\frac{\overline{X(z)}}{X(z)}\overline{W(z)} \tag{4.22}$$

于 D^{+}、D^{-} 上的解. 设 $\Omega_1^{*}(z,t)\Omega_1^{*}(z,t)$ 是复方程（4.22）于全平面上的基本核，由于（4.5），可知广义 Cauchy 型积分

$$(4.23)\quad W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*(z,\ t)\varphi(t)dt-\Omega_2^*(z,\ t)\overline{\varphi(t)}d\bar{t}$$

就是复方程（4.22）适合边界条件（4.21）的一个特解，而

$$(4.24)\quad w_*(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\left[\int_\Gamma\frac{\Omega_1^*(z,\ t)}{X^+(t)}g(t)\,dt-\frac{\Omega_2^*(z,\ t)}{X^+(t)}\overline{g(t)}d\bar{t}\right]$$

就是复方程（1.1）之问题 R 的一特解。

其次要求复方程（1.1）适合齐次边界条件

$$(4.25)\quad w_0^+(t)=G(t)w_0^-(t),\ \ t\in\Gamma.$$

的通解，这样的边值问题简称为问题 R_0。与前相仿，用（4.18）除（4.25），得

$$(4.26)\qquad \frac{w_0{}^+(t)}{X^+(t)}=\frac{w_0{}^-(t)}{X^-(t)},\ \ t\in\Gamma.$$

由于 $w_0(z)/X(z)$ 在 D^+、$D^--\{\infty\}$内是复方程（4.22）的正则解，而在 Γ 上连续，根据定理 3.10，可知 $w_0(z)/X(z)$ 是相应于（4.22）的广义整函数，它以点∞为极点（当 $K<0$）或可去奇点，根据 Liouville 定理可知 $P(z)=w_0(z)/X(z)$ 是广义多项式，因而

$$(4.27)\quad w_0(z)=X(z)P(z),$$

这表明复方程（1.1）之问题 R_0 的解是在点∞不高于有限级极点，它具有（4.27）的形式。

如果要求 $w_0(z)$ 在点∞的邻域内有界，并定义 $w_0(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}w_0(z)$。则当指数 $K\geqslant 0$，$X(z)$ 以点∞为 K 级零点，故 $P(z)$ 是对应于(4.22) 的 K 次广义多项式 $P_K(z)$，而问题 R_0 的通解可写成

$$(4.28)\quad w_0(z)=X(z)P_K(z).$$

又当指数 $K<0$，$X(z)=z^{-K}e^{\Gamma(z)}$ 以点∞为 $-K$ 级极点，而要使 $w_0(z)$ 在点∞的邻域内有界，应取广义多项式 $P(z)\equiv 0$，即此时 $w_0(z)\equiv 0$。这样，便可得到如下结果。

定理 4.3 对广义解析函数的齐次 Riemann 边值问题 R_0：

(1) 当指数 $K\geqslant 0$ 时，它在点∞有界的通解 $w_0(z)$ 具有 (4.28) 的形式，因此

(4.29) $X(z)Q_0(z)$，$X(z)Q_1(z)$，…，$X(z)Q_K(z)$

是此问题 R_0 在复数域中的 $K+1$ 个线性无关解，其中 $Q_k(z)$ 是复方程 (4.22) 的 k 次幂函数，$k=0, 1, \cdots, K$；

(2) 当 $K<0$ 时，它在点∞的有界解仅是零解。

对于广义解析函数的非齐次问题 R：

(3) 当 $K\geqslant 0$ 时，它在点∞有界的通解 $w(z)$ 具有形式

(4.30) $w(z)=w_0(z)+w_*(z)$，

其中 $w_0(z)$、$w_*(z)$ 分别如 (4.28)、(4.24) 式所示；

(4) 当 $K<0$ 时，非齐次问题 R 在点∞有界的可解条件为

(4.31)
$$\int_\Gamma \frac{g(t)}{X^+(t)}R_{1k}(z,\ t)\ dt-\frac{\overline{g(t)}}{X^+(t)}R_{2k}(z,\ t)d\bar{t}=0,$$

$$k=-1, -2, \cdots, -k-1,$$

其中 $R_{1k}(z,\ t)$、$R_{2k}(z,\ t)$ 是如下面 (4.32) 式所示的函数。当条件 (4.31) 成立时，问题 R 的解 $w(z)$ 具有 (4.24) 的形式。

证 (1)、(2)、(3) 的结论由前面的讨论即得。下面只证明 (4)。当 $K<0$ 时，齐次问题 R_0 没有非零解，注意到当 $z\in D^-$，$X(z)=z^{-k}e^{\Gamma(z)}$，它在点∞有 $-K$ 级极点，因此要求 (4.24) 式积分所示函数在点∞至少有 $-K$ 级零点。由 (3.33) 式，并注意到 (2.12) 式，可将 (4.24) 式中的基本核在点∞的邻域内展成广义幂级数。

(4.32) $\Omega_1^*(z, t)=\sum_{k=-1}^{-\infty} c_{1k}z^k R_{1k}(z, t)$,

$$\Omega_2^*(z, t)=\sum_{k=1}^{-\infty} c_{2k}z^k R_{2k}(z, t),$$

则当(4, 31) 成立时，(4.24) 中的积分所确定的函数在点∞有$-k$级零点，此时，问题R的解$w(z)$在点∞有界。

三、Haseman 与 Haseman 型边值问题

问题H 所谓广义解析函数的 Haseman 边值问题，即求复方程 (2.1) 于D^+、D^-上的分片正则解$w(z)$，使它直到边界$\Gamma\in C_\alpha^1(0<\alpha<1)$ 连续，且满足边界条件

(4.33) $w^+[\beta(t)]=G(t)\ w^-(t)+g(t),\ t\in\Gamma$,

其中$G(t)$、$g(t)$ 满足条件 (4.12)，又$\beta(t)$是将Γ_j保持方向、同胚映射到自身的函数，$j=0, 1,\cdots, N$，且

(4.34) $\beta'(t)\neq 0,\ \beta(t)\in C_\alpha^1(\Gamma),\ 0<\alpha<1$.

我们简称上述边值问题为问题H，特别当$\alpha(t)=t$，则问题H就是问题R。正如Riemann边值问题那样，使用复方程 (2.1) 形如 (4.13) 的解$\psi(z)$，可将上述问题H转化为齐次复方程 (4.15) 的边值问题H，只是要把 (4.33) 中的函数$g(t)$代以$g_*(t)=g(t)+G(t)\psi(t)-\psi[\alpha(t)]$。因此我们不妨只讨论复方程 (1.1) 之上述边值问题H，并把当$g(t)\equiv 0$的问题H记作问题H_0。

现在我们使用保角衔接原理（见书[76]中的定理 10.4)，即在D^+、D^-上存在分片单叶亚纯函数$\zeta(z)$，$\zeta(\infty)=\infty$，它满足边界条件

(4.35) $\zeta^+[\beta(t)]=\zeta^-(t),\ t\in\Gamma$,

而$\zeta(z)$将D^+、D^-分别映射到$\triangle^+$、$\triangle^-$，而$\triangle^+$、$\triangle^-$互不相交，

它们的边界为 L^+、L^-，且 $L^+=L^-=L\in C_\alpha^1$，$\triangle^+ + \triangle^- + L = E$（可参看书[128]31)，第五章定理 7.3)。以 $z(\zeta)$ 表示 $\zeta(z)$ 的反函数，记

(4.36) $w^*(\zeta)=w[z(\zeta)]$,

在上述变换下，复方程（1.1）转化如下的复方程

(4.37) $w^*_{\bar\zeta}=\overline{z'(\zeta)}\{A[z(\zeta)]w^*(\zeta)+B[z(\zeta)]\overline{w^*(\zeta)}\}$,

其中 $\overline{z'(\zeta)}A[z(\zeta)]$，$\overline{z'(\zeta)}B[z(\zeta)]\in L_{p,2}(E)$，又边界条件（4.33）转化为如下的 Riemann 边界条件

(4.38) $w^{*+}(\zeta)=G^*(\zeta)w^{*-}(\zeta)+g^*(\zeta)$，$\zeta\in L$,

其中 $G^*(\zeta)\neq 0$，$G^*(\zeta)$、$g^*(\zeta)\in C_\alpha(\Gamma)$，$\frac{1}{2}<\alpha<1$。

使用定理 4.3，我们可得关于复方程（4.37）适合边界条件（4.38）之 Riemann 边值问题的可解性结果，通过（4.36），便得复方程（1.1）之问题 H 的可解性定理。

定理 4.4 对于广义解析函数的非齐次问题 H,

(1) 当指数 $K\geq 0$，它在点 ∞ 有界的解是存在的，其通解 $w(z)$ 包含有 $2K+2$ 任意实常数；

(2) 当 $K<0$，在 $-2K-2$ 个实等式成立的条件下，此问题 H 是可解的。

下面我们还要介绍广义解析函数的 Haseman 型边值问题。

所谓广义解析函数的 Haseman 型边值问题即求复方程（2.1）在 D^+、D^- 上的分片正则解，直到边界 Γ 连续，且满足边界条件

(4.39) $w^+[\beta(t)]=G(t)\overline{w^-(t)}+g(t)$，$t\in\Gamma$,

这里 D^+、D^-、Γ、$G(t)$、$g(t)$ 与 Haseman 边值问题相同，但 $\beta(t)$ 是将 Γ_j 同胚映射到自身的反位移，$j=0, 1,\cdots, N$，且满足条件（4.34)，我们记此边值问题为**问题 H_***。

与前类似，这里也不妨只讨论复方程（1.1）的 Haseman 型边值问题．下面我们要将此 Haseman 型边值问题转化为 Riemann 边值问题．由文[126]中的定理 2.1，可知存在单叶解析函数 $\zeta^+(z)$，它将区域 D^+ 共形映射到与 D^+ 具有相同类型的区域$\triangle^+$，其边界为 $L=L_0+L_1+\cdots+L_N$，又 $L_j=\zeta^-(\Gamma_j), j=0,1,\cdots,N, L_0$ 包括$L_1,\cdots,L_N$在它的内部，而单叶函数$\zeta^-(z)$ 分别将 D^- 的 $N+1$ 个区域共形映射到 L_0 的外部 $\triangle_0^-$ 与 L_j的内部 $\triangle_j^-(j=1,\cdots,N)$，满足边界条件：$\zeta^+[\beta(t)]=\overline{\zeta^-(t)}$，$t\in\Gamma$，且 $\zeta^+(z)$，$\zeta^-(z)\in C_\alpha^1(\Gamma)$ 及它们的反函数 $z^+(\zeta)$、$z^-(\zeta)\in C_\alpha^1(L)$。

记 $z(\zeta)=\begin{cases}z^+(\zeta), & \zeta\in\triangle^+,\\ z^-(\zeta), & \zeta\in\triangle^-=E\backslash\overline{\triangle^+},\end{cases}$ 则

$$(4.40)\quad w_*(\zeta)=w[z(\zeta)]=\begin{cases}w^+[z^+(\zeta)], & \zeta\in\triangle^+,\\ \overline{w^-[z^-(\zeta)]}, & \zeta\in\triangle^-\end{cases}$$

是复方程

$$(4.41)\quad w_{*\bar\zeta}=\overline{z'(\zeta)}[A[z(\zeta)]w_*+B[z(\zeta)]\overline{w}_*]$$

于$\triangle^\pm$上的分片正则解，它满足边界条件

$$(4.42)\quad w_*^+(\zeta)=G[z^-(\zeta)]w_*^-(\zeta)+g[z^-(\zeta)],\ \zeta\in L,$$

记 $G_*(\zeta)=G[z^-(\zeta)]$，$g_*(\zeta)=g[z^-(\zeta)]$，它们满足与$G(t)$、$g(t)$相同的条件，而（4.42）就是 Riemann 边界条件

$$(4.43)\quad w_*^+(\zeta)=G_*(\zeta)w_*^-(\zeta)+g_*(\zeta),\ \zeta\in L.$$

由于$\frac{1}{2\pi}\triangle_L\arg G_*(\zeta)=-\frac{1}{2\pi}\triangle_\Gamma\arg G(t)=-K$，则由关于广义解析函数问题 R 的可解性定理，便可得到复方程（1.1）问题 H_*的可解性结果。

定理 4.5 对于广义解析函数的非齐次边值问题 H_*

（1）当指数 $K>0$，在 $2K-2$ 个实等式成立的条件下，问题 H_* 是可解的；

(2) 当 $K\leq 0$，它具有在点∞有界的解，其通解 $w(z)$ 包含有 $-2K+2$ 个任意实常数。

四、Carleman 边值问题

所谓复方程 (2.1) 的 Carleman 边值问题，即求 (2.1) 于 $N+1$ 连通区域 $D=D^+$ 上的正则解 $w(z)$，直到边界 Γ 上连续，且满足边界条件

(4.45) $w^+[\beta(t)]=G(t)w^+(t)+g(t),\ t\in\Gamma,$

这里 $G(t)\neq 0$，$G(t)$、$g(t)\in C_\alpha(\Gamma)$，$\alpha\left(\frac{1}{2}<\alpha<1\right)$是常数，$\beta(t)$ 是同胚反向地将 $\Gamma_j(j=0,1,\cdots,N)$，映射到自身的反位移函数，且 $\beta(t)\in C^1_\mu(\Gamma)$，$0<\mu<1$，$\beta'(t)\neq 0$，此外还设 $\beta(t)$ 与 $G(t)$，$g(t)$ 满足以下条件

(4.46) $\beta[\beta(t)]=t,\ G(t)G[\beta(t)]=1,$

$$g(t)G[\beta(t)]+g[\beta(t)]=0.$$

我们简称上述边值问题为 **问题 C**。记 $x=\frac{1}{2\pi}\ \Delta_\Gamma \arg G\ (t)$，$m$ 是同胚 $\beta=\beta(t)$ 不动点 $t_j(j=1,\cdots,m)$ 的个数，且在这些点上$G(t)=-1$，并称 $K=-(x+m)/2$ 为上述边值问题C的指数。

下面简略地介绍研究边值问题 C 的方法。

首先由书[76]中的定理 29.2，可知存在于 D 内的单叶函数 $\zeta(z)$，它以 $z=0$ 为一级极点，并满足边界条件

(4.47) $\zeta^+[\beta(t)]=\zeta^+(t),\ t\in\Gamma,$

又 $\zeta(z)=\zeta^+(z)$ 把区域 D 单叶映射到以 L 为边界的区域$\triangle$，L 是 ζ 平面上 $N+1$ 条不相交的 Jordan 弧 $L_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$，$L\in C^1_\mu$，$0<\mu<1$。在 $\zeta=\zeta(z)$ 的映射下，边界条件 (4.45) 转化为

(4.48) $w^+[z^+(\zeta)]=G[z^-(\zeta)]w^-[z^-(\zeta)]+g[z^-(\zeta)]$,

$\zeta\in L=\zeta(\Gamma)$,

设

(4.49) $W(\zeta)=\begin{cases}W^+(\zeta)=w^+[z^+(\zeta)],\\W^-(\zeta)=w^-[z^-(\zeta)],\end{cases}$

这里 z^+, z^-分别表示z在$\widehat{A_jB_j}$、$\widehat{B_jA_j}$上的极限值，点A_j、B_j $(j=0,1,\cdots,N)$ 是$\beta(t)$ 的不动点而在敞开弧 L 上的 Riemann 问题的边界条件 (4.48) 可写成

(4.50) $W^+(\zeta)=G[z^-(\zeta)]W^-(\zeta)+g[z^-(\zeta)]$, $\zeta\in L$.

在映射 $\zeta=\zeta(z)$之下，方程 (2.1) 转化为

(4.51) $W_{\bar\zeta}=\overline{z'(\zeta)}\{A[z(\zeta)]W+B[z(\zeta)]\overline{W}+C[z(\zeta)]\}$,

这里 $z(\zeta)$ 是 $\zeta(z)$ 的反函数，并且可知在 $L_j(j=0,1,\cdots,N)$ 的一切非端点上，$z'(\zeta)$ 是 Hölder 连续的，这可仿书[76]定理 13.4 来证明.

其次，考虑满足边界条件 (4.50)的解析函数的 Riemann 问题. 由[76]中的定理 29.3，可知当 $K=-(\varkappa+m)/2\geqslant0$ 时，它有 $l=1-(\varkappa+m)/2$ 个有界解，而当 $K<0$ 时，允许在点∞有 $|K|-1$ 级极点的解也是存在的. 今以 $X(\zeta)$、$\Phi(\zeta)$ 分别表示满足 (4.50) 的齐次边界条件

(4.52) $X^+(\zeta)=G[z^-(\zeta)]X^+(\zeta)$, $\zeta\in L$

与非齐次边界条件(4.50) 适当的解析函数. 作函数

(4.53) $V(\zeta)=[W(\zeta)-\Phi(\zeta)]/X(\zeta)$, 即

$W(\zeta)=\Phi(\zeta)+X(\zeta)V(\zeta)$,

可证：在除了 $L_j(j=0,1,\cdots,N)$ 的端点 a_j、$b_j(j=0,1,\cdots,N)$ 外，$\Phi(\zeta)$、$X(\zeta)$ 满足 Hölder 连续的条件. 使用消去法 (见文[87]1))，由于$W(\zeta)$ 满足边界条件 (4.50)，故有

(4.54) $W^+(\zeta)=\Phi^+(\zeta)+X^+(\zeta)V^+(\zeta)=$

$=G[z^-(\zeta)][\Phi^-(\zeta)+X^-(\zeta)V^+(\zeta)]+$

$$
\begin{aligned}
&g[z^-(\zeta)]\\
&=G[z^-(\zeta)]W^-(\zeta)+g[z^-(\zeta)]\\
&=G[z^-(\zeta)][\Phi^-(\zeta)+X^-(\zeta)V^-(\zeta)]\\
&\quad+g[z^-(\zeta)],
\end{aligned}
$$

因 $X^-(\zeta)\neq 0$，当 $\zeta\in L$ 时，故 $V^+(\zeta)=V^-(\zeta)$。而 $V(\zeta)$ 在全平面上几乎处处满足条件

$$
\begin{aligned}
(4.55)\quad V_{\bar\zeta}=&\overline{z'(\zeta)}\{A[z(\zeta)]V+B[z(\zeta)]\overline{X(\zeta)}/X(\zeta)\bar V\}\\
&+\overline{z'(\zeta)}\{A[z(\zeta)]\Phi(\zeta)+B[z(\zeta)]\overline{\Phi(\zeta)}\\
&+C[z(\zeta)]\}/X(\zeta),
\end{aligned}
$$

由此可证 $V(\zeta)$ 是方程 (4.55) 在全平面上的解，且 $V(\infty)=0$。只要方程 (4.55) 的系数在点 a_j，$b_j(j=0,1,\cdots,N)$ 与点∞满足一些条件，使得它们均属于 $L_{p,2}(E)$。根据定理 1.11，可知 (4.55)具有形如 $V(\zeta)=T\omega(\omega(\zeta)\in L_{p,2}(E))$ 的解，且 $V(\infty)=0$。通过 (4.53)，便知 $w(z)=W[\zeta(z)]$是方程 (2.1) 之问题 C 的解。这样，我们便得如下的结果：

定理 4.6 对于一阶复方程 (2.1)，当其系数在 $z=0$ 与 $\beta(t)$ 的不动点处满足某些条件时，则

(1) 当标数 $K=-(x+m)/2\geqslant 0$ 时，其问题 C 是可解的，且可使其解 $w(z)$ 在$z=0$ 等于 0。

(2) 当标数 $K<0$ 时，其问题 C 可解，但其解 $w(z)$ 在点 $z=0$ 有不超过 $|K|-1$ 级极点，并由此可推出 $w(z)$ 在 $z=0$ 有界的可解条件个数$\leqslant 2|K|-2$。

§ 5 Riemann-Hilbert 边值问题及其推广

本节先讨论广义解析函数的 Riemann-Hilbert 边值问题，然后讨论更一般的 Carleman 型边值问题。这里不妨设 D 是单位

圆内$N+1$连通圆界区域，其边界$\Gamma=\sum_{j=0}^{N}\Gamma_j$，$\Gamma_j=\{|z-z_j|=\gamma_j\}, j=0, 1, \cdots, N$，$\Gamma_0=\Gamma_{N+1}=\{|z|=1\}$。因为否则，通过将一般$N+1$连通区域$D$（其边界$\Gamma\in C_\mu^1, 0<\mu<1$）共形映射到上述$N+1$连通圆界区域$G$的单叶解析函数$\zeta=\zeta(z)$的变换即达要求。事实上，以$z=z(\zeta)$表示$\zeta=\zeta(z)$的反函数，设$w(z)$是复方程（2.1）在区域$D$内的解，记$W(\zeta)=w[z(\zeta)]$，由于$W_{\bar\zeta}=w_{\bar z}\cdot\overline{z'(\zeta)}$，那么便知$W(\zeta)$是以下复方程在$N+1$连通圆界区域$G$内的解：

$$W_{\bar\zeta}=\overline{z'(\zeta)}\{A[z(\zeta)]W+B[z(\zeta)]\overline{W}+C[z(\zeta)]\},$$

其中系数$\overline{z'(\zeta)}A[z(\zeta)]$，$\overline{z'(\zeta)}B[z(\zeta)]$，$\overline{z'(\zeta)}C[z(\zeta)]$在$\bar G$上满足$A(z)$，$B(z)$，$C(z)$在$\bar D$上类似的条件。

一、Riemann-Hilbert 边值问题的提法

问题 A 设复方程（2.1）在区域D上满足条件C，即

(5.1) $L_p[A(z), \bar D]\leqslant k$，$L_p[B(z), \bar D]\leqslant k$，$L_p[C(z), \bar D]\leqslant k$，

这里$p(>2)$、k（$\geqslant 0$）都是实常数。所谓（2.1）的Riemann-Hilbert边值问题即求（2.1）在$\bar D$上的连续解$w(z)$，使它满足边界条件

(5.2) $\operatorname{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)]=r(t)$，$t\in\Gamma$，

其中$\lambda(t)\neq 0$，不妨设$|\lambda(t)|=1$，又$\lambda(t)$、$r(t)$满足

(5.3) $C_\alpha[\lambda(t), \Gamma]\leqslant l<\infty$，$C_\alpha[r(t), \Gamma]\leqslant l$，$0<\alpha<1$，

这里α，l都是实常数。特别当$\lambda(t)=1$，上述问题A就是Dirichlet边值问题。又当$r(t)=0$之问题A记作**问题 A_0**。

数$K=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg\lambda(t)$称为边值问题$A$的标数。当$K\geqslant N$时，问题$A$的解不唯一，又当$K<N$时，问题$A$不一定可解。因此，

我们考虑如下的变态边值问题 B，即将边界条件（5.1）改为

(5.4) $\operatorname{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)]=r(t)+h(t),\quad t\in\Gamma,$

其中

$$(5.5)\quad h(t)=\begin{cases}0,\ t\in\Gamma,\ 当\ K\geqslant N,\\ \left.\begin{array}{l}h_j,\ t\in\Gamma_j,\ 1\leqslant j\leqslant N-K\\ 0,\ t\in\Gamma_j\quad N-K<j\leqslant N+1\end{array}\right\}当\ 0\leqslant K<N,\\ h_j-\operatorname{Re}[\overline{\lambda(t)}\sum_{m=-1}^{2K+2}H_m w_m(t)],\ t\in\Gamma_j,\quad 0\leqslant j\leqslant N,\\ 当\ K<0,\end{cases}$$

这里 $\Gamma_{N+1}=\Gamma_0$，$h_j(j=0,\ 1,\cdots,\ N)$、$H_m(m=-1,\cdots,\ 2K+2)$ 都是待定实常数，$w_m(z)$ 是$\left[\frac{m}{2}\right]$幂的广义幂函数，如（3.15）式所示。又当 $K\geqslant 0$，我们还可要求解 $w(z)$ 满足如下的点型条件

(5.6) $\operatorname{Im}[\overline{\lambda(a_j)}w(a_j)]=b_j,$

$$j\in\{j\}=\begin{cases}1,\cdots,\ 2K-N+1,\ 当K\geqslant N,\\ N-K+1,\cdots,\ N+1,\ 当\ 0\leqslant K<N.\end{cases}$$

此处，a_j 是 Γ_j 上的固定点，$j=1,\cdots,N,a_j(j=N+1,\cdots,\ 2K-N+1)$ 是 Γ_0 上不同的点，$b_j(j=1,\cdots,\ 2K-N+1)$ 都是实常数，满足

(5.7) $|b_j|\leqslant l,\ j\in\{j\}$

特别当 $\lambda(t)=1$，边值问题 B 就是变态 Dirichlet 问题。又把当 $r(t)=0$，$t\in\Gamma$ 之边值问题 B 记作**问题 B_0**。

此外，我们还可将边界条件（5.4）与点型条件（5.6）标准化，正如书[128]31）第五章§1 中所述，先求出解析函数变态 Dirichlet 问题的解 $S(z)$，满足边界条件

(5.8) $\operatorname{Re}S(t)=S(t)-\theta(t),\ t\in\Gamma,\ \operatorname{Im}S(1)=0,$

其中

$$(5.9)\quad S_1(t)=\begin{cases}\arg\lambda(t)-K\arg t+\arg\pi(t), & t\in\Gamma_0,\\ \arg\lambda(t)+\arg\pi(t), & t\in\Gamma-\Gamma_0,\end{cases}$$

$$\theta(t)=\begin{cases}0, & t\in\Gamma_0,\\ \theta_j, & t\in\Gamma_j,\ j=1,\cdots,N,\end{cases}$$

又 $\pi(z)=\prod_{j=1}^{N}(t-z_j)^{K_j}$, $K_j=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_j}\arg\lambda(t)$, $j=0,1,\cdots,N$,

而 $\theta_j(j=1,\cdots,N)$ 都是实常数，记 $S_2(z)=\operatorname{Im}S(z)$，当 $z\in\bar{D}$，因 $S(t)=S_1(t)+iS_2(t)-\theta(t)$，故有

$$(5.10)\quad -iS_1(t)=-iS(t)-S_2(t)-i\theta(t),\ t\in\Gamma.$$

作函数的变换

$$(5.11)\quad W(z)=e^{-iS(z)}\pi(z)w(z)=w(z)/\triangle(z),\ z\in D,$$

那么复方程 (2.1) 转化为

$$(5.12)\quad W_{\bar z}=A(z)W(z)+B(z)\frac{\overline{\triangle(z)}}{\triangle(z)}\overline{W(z)}+\frac{C(z)}{\triangle(z)},$$

其中 $\triangle(z)=e^{iS(z)}/\pi(z)$，而方程的系数仍满足类似的条件 C，即

$$(5.13)\quad L_p[A(z),\ \bar{D}]\leqslant k,\ L_p\left[B(z)\frac{\overline{\triangle(z)}}{\triangle(z)},\bar{D}\right]\leqslant k,$$

$$L_p\left[\frac{C(z)}{\triangle(z)}\bar{D}\right]\leqslant k_1,$$

这里 $k_1=k_1(p,\ k,\ D)$ 而边界条件 (5.4) 与点型条件 (5.6) 转化为

$$(5.14)\quad \operatorname{Re}[\overline{\Lambda(t)}W(t)]=R(t)+H(t),\ t\in\Gamma,$$

$$(5.15)\quad \operatorname{Im}[\overline{\Lambda(a_j)}W(a_j)]=B_j,\ j\in\{j\},$$

其中

$$(5.16)\quad \Lambda(t)=\begin{cases}t^K, & t\in\Gamma_0,\\ e^{i\theta_j}, & t\in\Gamma_j,\ j=1,\cdots,N,\end{cases}$$

$R(t)=r(t)e^{S_2(t)}|\pi(t)|=r(t)/|\Delta(t)|$、$H(t)=h(t)/|\Delta(t)|$，$B_j=|b_j|/|\Delta(a_j)|$，$j\in\{j\}$。我们把求解复方程（5.12）适合边界条件（5.14）、点型条件（5.15）之边值问题记作**问题 E**。又当 $R(t)=0$，$t\in\Gamma$，$B_j=0$，$j\in\{j\}$之问题 E 记作**问题 E_0**。

通过复方程（5.12）之问题 E，我们可以给出复方程(2.1)之问题 B 与问题 **A** 解的积分表示（见书[128]23、31）。

二、复方程（2.1）问题 B 解的估计式

定理 5.1 对于满足条件 **C** 的复方程（2.1），其问题 **B** 的解 $w(z)$满足估计式

(5.17) $C_\beta[w(z),\ \bar{D}]\leqslant M_1$，$L_p[w_{\bar z},\ \bar{D}]\leqslant M_2$，

这里 $\beta=\min(\alpha,\ 1-2/p)$，$M_j=M_j(p,\ k,\ \alpha,\ l,\ D)$，$j=1,\ 2$。

证 设 $w(z)$ 是复方程（2.1）之问题 **B** 的解，由定理 1.9，$w(z)$ 可表示成

(5.18) $w(z)=\Phi(z)e^{\varphi(z)}+\psi(z)$，

其中 $\varphi(z)$、$\psi(z)$ 满足估计式（1.17）、（1.18）。于是复方程（2.1）之问题 B 的解 $w(z)$ 就转化为解析函数满足如下边界条件与点型条件之问题 B 的解 $\Phi(z)$：

(5.19) $\mathrm{Re}[\overline{\Lambda(t)}\Phi(t)]=R(t)+H(t)$，$t\in\Gamma$，

(5.20) $\mathrm{Im}[\overline{\Lambda(a_j)}\Phi(a_j)]=B_j$，$j\in\{j\}$，

这里

$$(5.21)\quad \begin{cases}\overline{\Lambda(t)}=\overline{\lambda(t)}e^{iIm\varphi(t)},\\ \qquad R(t)=\{r(t)-Re[\overline{\lambda(t)}\psi(t)]\}e^{-Re\varphi(t)},\\ H(t)=h(t)e^{-Re\,\varphi(t)},\\ \qquad B_j=\{b_j+Im[\overline{\lambda(a_j)}\psi(a_j)]\}e^{-Re\varphi(a_j)},\ j\in\{j\},\end{cases}$$

而 $\Lambda(t)$，$R(t)$、B_j 满足

(5.22) $C_\beta[\Lambda(t),\ \Gamma]\leqslant l$，$C_\beta[R(t),\ \Gamma]\leqslant l_1$，$|B_j|\leqslant l_1$，$j\in\{j\}$，

此处$\beta=\min(\alpha,\ 1-2/p_0)$，$l_1=l_1(p,\ k,\ \alpha,\ l,\ D)$。虽然这里的$H(t)=h(t)e^{-Re\varphi(t)}$与书[128]31) 第五章§1中的$h(t)$有所区别，但使用类似的方法，仍可得到书[128]31) 第二章引理2.1—引理2.3中当标数$K\geqslant-1$时的估计式。

(5.23) $C_\beta[\Phi(z),\ \bar{D}]\leqslant M_3=M_3(p,\ k,\ \alpha,\ l,\ D)$.

由 (5.18)、(1.17)、(1.18) 与上式，便得问题B $(K\geqslant-1)$的解$w(z)$满足估计式 (5.17)。

当标数$K<-1$时，记$I(z)=\sum_{m=-1}^{2K+2}H_m w_m(z)$，则

(5.24) $W(z)=[w(z)-\psi(z)+I(z)]z^{|K|-1}$

是复方程

(5.25) $W_{\bar{z}}=A(z)W(z)+B(z)\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{|K|-1}\overline{W(z)}$

于区域D内的解，满足边界条件

(5.26) $Re[\overline{\lambda_0(t)}W(t)]=R(t)+h_j,\ t\in\Gamma_j,\ j=0,\ 1,\cdots,\ N,$

其中$R(t)$如 (5.21) 式中所设，$\lambda_0(t)=\lambda(t)/\bar{z}^{|K|-1}$的标数等于$-1$，$h_j(0\leqslant j\leqslant N)$都是待定实常数。类似于前面当$K=-1$时问题$B$的解的估计式，便知$W(z)$满足估计式

(5.27) $C_\beta[W(z),\ \bar{D}]\leqslant M_4,\ L_p[W_{\bar{z}},\ \bar{D}]\leqslant M_5,$

这里$M_j=M_j(p,\ k,\ \alpha,\ l,\ D)$，$j=4,\ 5$。注意到$w_m(z)z^{|K|-1}$是复方程 (5.25) 的非负幂的广义幂函数，并使用定理3.8，可证$I(z)z^{|K|-1}$满足估计式

(5.28) $C_\beta[I(z)z^{|K|-1},\ \bar{D}]\leqslant M_6,\ L_p[(I(z)z^{|K|-1})_{\bar{z}},\ \bar{D}]\leqslant M_7,$

此处$M_j=M_j(p,\ k,\ \alpha,\ l,\ D)$，$j=6,\ 7$。因而可导出估计式 (5.17)。

为了证明复方程 (2.1) 之问题B的可解性，我们还需要以下引理。

引理 5.1 如果将条件 C 中的 $L_p[C(z), \bar{D}]\leqslant k$ 与边界条件 (5.4)、(5.6) 中的 $C_\alpha[r(t), \Gamma]\leqslant l$, $|b_j|\leqslant l$ 改为

(5.29) $L_p[C(z), \bar{D}]\leqslant k_2$, $C_\alpha[r(t), \Gamma]\leqslant k_2$, $|b_j|\leqslant k_2$,

这里 k_2 是非负常数，则复方程 (2.1) 之问题 B 的解 $w(z)$ 满足估计式

(5.30) $C_\beta[w(z), \bar{D}]\leqslant M_8 k_2$, $L_p[w_{\bar{z}}, \bar{D}]\leqslant M_9 k_2$,

其中 $M_j=M_j(p, k, \alpha, l, D)$, $j=8, 9$.

证 先考虑 $k_2>0$, 令 $W(z)=w(z)/k_2$, 则 $W(z)$ 是复方程

(5.31) $W_{\bar{z}}=A(z)W+B(z)\overline{W(z)}+C(z)/k_2$

于区域 D 内的解，满足边界条件与点型条件

(5.32) $Re[\overline{\lambda(t)}W(t)]=r(t)/k_2+h(t)$, $t\in\Gamma$,

(5.33) $Im[\overline{\lambda(a_j)}W(a_j)]=b_j/k_2$, $j\in\{j\}$,

由于

(5.34) $L_p[C(z)/k_2, \bar{D}]\leqslant 1$, $C_\alpha[r(t)/k_2, \Gamma]\leqslant 1$, $|b_j/k_2|\leqslant 1$,

根据定理 5.1, 可得 $W(z)$ 所满足的估计式

(5.35) $C_\beta[W(z), \bar{D}]\leqslant M_8$, $L_p[W_{\bar{z}}, \bar{D}]\leqslant M_9$,

由上式即得 $w(z)=k_2W(z)$ 所满足估计式 (5.30)。

当 $k_2=0$, 即 $C(z)=0$, $z\in D$, $r(t)=0$, $t\in\Gamma$, $b_j=0$, $j\in\{j\}$。容易看出，用任意小的正数 ε 代替 k_2, (5.30) 式成立，让 $\varepsilon\to 0$, 即得 $k_2=0$ 时的 (5.30) 式

三、复方程 (2.1) 问题 B 解的存在唯一性

为了证明复方程 (2.1) 问题 B 解的存在唯一性，我们先证明如下引理：

引理 5.2 设 $w(z)$ 是复方程 (1.1) 之问题 B_0(无点型条件) 在闭区域 $\bar{D}$ 上的非零解，又标数 $K\geqslant -1$, 以 N_D 与 N_Γ 分别表示 $w(z)$ 在 D 内与 Γ 上的零点个数，则有

(5.36) $$2N_D + N_\Gamma = 2K.$$

证 根据定理1.1，$w(z)$可表示成

(5.37) $$w(z) = \Phi(z)e^{\varphi(z)},$$

这里 $\varphi(z)$ 是 $\bar{D}$ 上的连续函数，易知 $e^{\varphi(z)} \neq 0$，$z \in \bar{D}$，故 $w(z)$ 在 $\bar{D}$ 上的零点与解析函数 $\Phi(z)$ 的零点相同，又边界条件：

(5.38) $$Re[\overline{\lambda(t)}w(t)] = h(t),\ t \in \Gamma,$$

可转化为 $\Phi(z)$ 所满足的边界条件

(5.39) $$Re[\overline{\lambda_1(t)}\Phi(t)] = e^{-Re\varphi(t)}h(t),\ t \in \Gamma,$$

这里 $\lambda_1(t) = \lambda(t)e^{-Re\varphi(t)}$，$|\lambda_1(t)| = 1$，$e^{-Re\varphi(t)} \neq 0$，$t \in \Gamma$，这样，与书[128]23）第五章定理2.2的证明一样，可知对于解析函数 $\Phi(z)$，公式（5.36）成立，因而对上述函数 $w(z)$，也有（5.36）式。

定理5.2 对于满足条件 C 的复方程（2.1），其问题 B 的解是唯一的。

证 设 $w_1(z)$、$w_2(z)$ 是（2.1）之问题 B 的两个解，则 $w(z)$ 是方程（1.1）之问题 B_0 的解。假如 $w(z) \not\equiv 0$，当 $z \in \bar{D}$，则由表示式（5.37），可知 $\Phi(z) \not\equiv 0$，$z \in D$。由 $w(z)$ 所满足的边界条件（5.38）与点型条件

(5.40) $$Im[\overline{\lambda(a_j)}w(a_j)] = 0,\ j \in \{j\}$$

可转为解析函数 $\Phi(z)$ 所满足的边界条件（5.39）与点型条件

(5.41) $$Im[\overline{\lambda_1(a_j)}\Phi(a_j)] = 0,\ j \in \{j\}.$$

与书[128]23）第五章定理2.3的证明那样，当 $K \geqslant -1$，可推出矛盾，因而 $\Phi(z) \equiv 0$，$w(z) \equiv 0$，即 $w_1(z) \equiv w_2(z)$，$z \in \bar{D}$。

当 $K < -1$，$w(z)$ 满足边界条件（5.38），其中 $h(t) = h_j - Re[\overline{\lambda(t)}I(t)]$，$I(t) = \sum_{m=-1}^{2K+2} H_m w_m(t)$ 是已知函数，而函数 $W(z) = [w(z) + I(z)]z^{|K|-1}$ 是复方程（5.25）于区域 D 内的解，

在 $\bar{D}$ 上连续，且满足边界条件

(5.42) $Re[\overline{\lambda_0(t)}W(t)]=0,\ t\in\Gamma.$

而 $\lambda_0(t)=\lambda(t)/\bar{z}^{K-1}$ 的标数为 -1。由前面已证 $K=-1$ 时的结果，可知 $W(z)\equiv 0,\ z\in D$。从而推出 $I(z)\equiv 0,\ w(z)\equiv 0$，即 $w_1(z)\equiv w_2(z),\ z\in D$。这就证明了复方程（2.1）之问题 **B** 解的唯一性。

定理 5.3 在定理 5.2 的条件下，复方程（2.1）之问题 *B* 存在着解 $w(z)$。

证 我们使用参数开拓法，先考虑标数 $K\geq -1$ 时带参数 $\varepsilon(0\leq\varepsilon\leq 1)$ 的复方程

(5.43) $w_{\bar{z}}-\varepsilon f(w)=F(z),\ f(w)=A(z)w+B(z)\bar{w},$

其中 $F(z)\in L_p(\bar{D}),\ p>2$。当 $\varepsilon=0$ 时，复方程（5.43）之问题 *B* 具有解 $w(z)=\Phi(z)+\varphi(z),\ \varphi(z)=TF$，其中 $\Phi(z)$ 是区域 D 内的解析函数，在 $\bar{D}$ 上连续，满足边界条件与点型条件。

(5.44) $Re[\overline{\lambda(t)}\Phi(t)]=r(t)-Re[\overline{\lambda(t)}\varphi(t)]+h(t),\ t\in\Gamma,$

(5.45) $Im[\overline{\lambda(a_j)}\Phi(a_j)]=b_j-Im[\overline{\lambda(a_j)}\varphi(a_j)],\ j\in\{j\}.$

（见书[128]31）第五章定理 3.3 定理 4.3 及定理 4.6。）

设 $\varepsilon=\varepsilon_0(0\leq\varepsilon_0<1)$ 时，复方程（5.43）之问题 **B** 可解，我们可证：存在与 ε_0 无关的正数 δ，使得对 $|\varepsilon-\varepsilon_0|\leq\delta$ 且 $0\leq\varepsilon\leq 1$ 中的 ε，复方程（5.43）之问题 **B** 可解，这可仿定理 1.11 的证明来作，只要取那里的 $w_0(z)=\Phi(z)+TF$，其中 $\Phi(z)$ 如前所述，并且有相应的函数序列 $\{w_n(z)\}$，满足边界条件与点型条件

(5.46) $Re[\overline{\lambda(t)}w_n(t)]=r(t)+h(t),\ t\in\Gamma,$

(5.47) $Im[\overline{\lambda(a_j)}w_n(a_j)]=b_j,\ j\in\{j\}.$

而 $w_{n+1}(z)-w_n(z)$ 是复方程

(5.48) $(w_{n+1}-w_n)_{\bar{z}}-\varepsilon_0 f(w_{n+1}-w_n)=(\varepsilon-\varepsilon_0)f(w_n-w_{n-1})$

在区域 D 内的解，满足边界条件与点型条件

(5.49) $Re\,[\lambda(t)(w_{n+1}(t)-w_n(t))]=h(t),\ t\in\Gamma,$

(5.50) $Im\,[\overline{\lambda(a_j)}(w_{n+1}(a_j)-w_n(a_j))]=0,\ j\in\{j\}.$

又 $(\varepsilon-\varepsilon_0)f(w_n-w_{n-1})$ 满足

(5.51) $L_p[(\varepsilon-\varepsilon_0)f(w_n-w_{n-1}),\ \overline{D}]\leqslant 2|\varepsilon-\varepsilon_0|kC_\beta[w_n-w_{n-1},\ \overline{D}],$

使用引理 5.1，可得

(5.52) $C_\beta[w_{n+1}-w_n,\ \overline{D}]\leqslant 2|\varepsilon-\varepsilon_0|kM_8C_\beta[w_n-w_{n-1},\ \overline{D}],$

其中 M_8 是 (5.30) 中的常数，选取 $\delta=1/4(kM_8+1)$，则仿定理 1.11 的证明，可证：当 $|\varepsilon-\varepsilon_0|\leqslant\delta$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$，复方程 (5.43) 之问题 B 存在着解 $w(z)$。这样，从 $\varepsilon=0$ 可依次推出当 $\varepsilon=\delta,\cdots,\left[\frac{1}{\delta}\right]\delta$，1 时复方程 (5.43) 之问题 B 可解，特别当 $\varepsilon=1$，$F(z)=C(z)$ 时复方程 (5.43) 即复方程 (2.1) 之问题 B 是可解的。

当标数 $K<-1$，则可把求解复方程 (2.1) 之问题 B 的解 $w(z)$ 转化为求解复方程 (5.25) 适合边界条件 (5.26) 之问题 $B(K=-1)$ 的解，由前面已得的结果即知 (2.1) 之问题 $B(K<-1)$ 是可解的。

由以上定理，可得复方程 (2.1) 之问题 A 的可解性结果。

定理 5.4 设复方程 (2.1) 满足条件 C，

(1) 当标数 $K\geqslant N$，其问题 A 的通解 $w(z)$ 可表示成

$$(5.53)\quad w(z)=w_0(z)+\sum_{k=1}^{J}c_kw_k(z),$$

这里 $w_0(z)$ 是 (2.1) 之问题 A 的一特解，$J=2K-N+1$，$w_k(z)(k=1,\cdots,J)$ 是 (1.1) 之齐次问题 A_0 的线性无关解的完全组；

(2) 当 $0\leqslant K<N$，其问题 A 有 $N-K$ 个可解条件，当这些条件成立时，(2.1) 之问题 A 的通解 $w(z)$ 可表成 (5.53) 式

其中 $J=K+1$；

(3) 当 $K<0$ 时，问题 A 有 $-2K+N-1$ 个可解条件.

证 (1) 当 $K\geqslant N$ 时，用 $w_m(z)(m=1,\cdots,2K-N+1)$ 表示复方程 (1.1) 之问题 B_0 的解，满足点型条件

$$(5.54)\quad Im\,[\overline{\lambda(a_j)}w_m(a_j)]=b_{jm}=\begin{cases}1, & j=m,\\ 0, & j\neq m,\end{cases}$$

$$j,\ m=1,\cdots,\ 2K-N+1.$$

易知它们线性无关. 以 $w_0(z)$ 表示 (2.1) 之问题 A 的一特解，则 $w(z)-w_0(z)$ 为 (1.1) 的问题 A_0 的解，记

$$(5.55)\quad c_j=Im[\overline{\lambda(a_j)}][w(a_j)-w_0(a_j)],$$

由定理 5.2, 可知

$$(5.56)\quad w(z)-w_0(z)=\sum_{m=1}^{J}c_m w_m(z),$$

这里 $J=2K-N+1$，从上式即得 (5.53).

(2) 当 $0\leqslant K<N$，将 (2.1) 之问题 B 的解 $w(z)$ 代入边界条件 (5.4)，如果 $h(t)=h_j=0$，$j=1,\cdots N-K$，则 $w(z)$ 也是 (2.1) 之问题 A 的解，这表明问题 A 有 $N-K$ 个可解条件. 当这些条件满足时，复方程 (2.1) 之问题 A 的通解 $w(z)$ 具有形如 (5.53)$(J=K+1)$ 的表示式，可仿 $K\geqslant N$ 的情形来证.

(3) 当 $K<0$ 时，将 (2.1) 之问题 B 的解 $w(z)$ 代入到边界条件 (5.4)，如果 $h_j=0(j=0,1,\cdots,N)$，$H_m=0(m=-1,\cdots,2K-2)$，则 $w(z)$ 也是问题 A 的解，这表明问题 A 有 $-2K+N-1$ 个可解条件.

如果将 (5.5) 当 $K<0$ 时的条件改为

$$(5.57)\quad h(t)=\begin{cases}h_j, & t\in\Gamma_j,\ j=1,\cdots,\ N,\\ h_0+\mathrm{Re}\sum\limits_{m=1}^{K-1}(H_m^{+}+iH_m^{-})t^m, & t\in\Gamma_0,\end{cases}$$

其中 $h_j(j=0, 1,\cdots, N)$, $H_m^{\pm}(m=1,\cdots,|K|-1)$ 都是待定实常数，复方程（2.1）经修改后之问题 B 记作**问题 B_***。

在书[128]31）第五章中，我们已得到了复方程（2.1）之问题 B_* 的可解性结果现叙述如下：

定理 5.5 在定理 5.4 的条件下，复方程（2.1）之问题 B_* 存在唯一解，且此解 $w(z)$ 满足估计式（5.17）。

四、Carleman 型边值问题

最后我们简略地介绍复方程（2.1）的 Carleman 型边值问题 C_*，即求复方程（2.1）在闭区域 $\bar{D}$ 上的连续解 $w(z)$，使它满足边界条件

$$w[\beta(t)]=G(t)\overline{w(t)}+g(t),\ t\in\Gamma, \tag{5.58}$$

其中 $\beta(t)$ 是把 Γ_j 同胚映射到自身的正位移，$\beta(t)$ 具有不动点 $a_j\in\Gamma_j$，$j=0, 1,\cdots, N$，$\beta(t)$、$G(t)$、$g(t)$ 满足条件

$$\begin{cases} C_\alpha[\beta(t),\Gamma]\leqslant l,\ |\beta'(t)|\geqslant l^{-1},\ 0<\alpha<1,\ 1<l<\infty, \\ G(t)\neq 0, C_v[G(t),\Gamma]\leqslant l, C_v[g(t),\Gamma]\leqslant l,\ 0<v<1, \\ \beta[\beta(t)]=t,\ G(t)\overline{G[\beta(t)]}=1, \\ \qquad G(t)\overline{g[\beta(t)]}+g(t)=0,\ t\in\Gamma. \end{cases} \tag{5.59}$$

如果 $\beta(t)=t$，$\overline{\lambda(t)}=i\overline{G(t)}^{\frac{1}{2}}$，$r(t)=i\overline{G(t)}^{\frac{1}{2}}g(t)/2$，那么（5.58）可写成

$$Re[\overline{\lambda(t)}w(t)]=r(t),\ t\in\Gamma, \tag{5.60}$$

这就是形如（5.2）的边界条件，但 $\lambda(t)$、$r(t)$ 在 Γ 上可能有一些第一类间断点。

为了讨论复方程（2.1）之问题 C_* 的可解性。我们提出相应的适定变态边值问题 C'_*，即将边界条件（5.58）改成为

$$w[\beta(t)]=G(t)\overline{w(t)}+g(t)+H(t),\ t\in\Gamma, \tag{5.61}$$

其中 $H(t)=G(t)\overline{h(t)}-h(t)$，

$$(5.62)\quad h(t)=\begin{cases}0,\ t\in\Gamma,\ K=\frac{1}{4\pi}\Delta_\Gamma\arg G(t)>N-1,\\ \left.\begin{array}{l} ih_j,\ t\in\Gamma_j,\ j=1,\\ \qquad \cdots,\ N-K' \\ 0, t\in\Gamma_j, j=N-K'+1,\\ \qquad \cdots, N+1\end{array}\right\} \begin{array}{l}0\leqslant K\leqslant N-1,\\ K'=\left[|K|+\frac{1}{2}\right]\end{array}\\ ih_j,\ t\in\Gamma_j,\ j=0,\ 1,\cdots,\ N,\ K<0\end{cases}$$

这里 $h_j(j=0,\ 1,\cdots,\ N)$ 都是待定实常数。不妨设 $K_j=\frac{1}{4\pi}\Delta_{\Gamma_j}\arg G(t)(j=1,\cdots,N_0,N_0\leqslant N)$ 不是整数，而 $K_j(j=N_0+1,\cdots,\ N)$ 是整数。当 $K\geqslant 0$，还可要求解 $w(z)$ 满足如下的点型条件

$$(5.63)\quad \begin{cases}\left.\begin{array}{l}\operatorname{Re}\overline{G(a_{j+N-N_0-K'})}^{\frac{1}{2}}w(a_{j+N-N_0-K'})\\ =b_j,\ j=1,\cdots,[K]+1,\ K'<N-N_0\\ \left.\begin{array}{l}\operatorname{Re}\overline{G(a_j)}^{\frac{1}{2}}w(a_j)=b_j,\\ j=\begin{cases}1,\cdots,\ N-N_0+I,\\ K_*=[K]+1-N+N_0\\ I=\begin{cases}1,\ K_*\text{是奇数},\\ 0,\ K_*\text{是偶数},\end{cases}\end{cases}\\ \operatorname{Re}w(a_j)=b_j,\ j=N-N_0+I+1,\ \cdots,\\ \qquad N-N_0+I+[K_*/2],\\ \operatorname{Im}w(a_j)=b_j,\ j=N-N_0+I+[K_*/2]\\ \qquad +1,\ \cdots,\ [K]+1,\end{array}\right\} K'\geqslant N-N_0\end{array}\right\} 0\leqslant K\leqslant N-1\\ \left.\begin{array}{l}\operatorname{Re}\overline{G(a_j)}^{\frac{1}{2}}w(a_j)=b_j, j=1,\cdots,N-N_0\\ \qquad +I,\ I=\begin{cases}1,\ K_*\text{是奇数}\\ 0,\ K_*\text{是偶数}\end{cases}\end{array}\right)\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Re}w(a_j)=b_j,\ j=N-N_0+I\\ \quad+1,\cdots,N-N_0+I+[K^*/2]\\ \operatorname{Im}w(a_j)=b_j,\ j=N-N_0+I\\ \quad+[K^*/2]+1,\cdots,2K-N+1\end{array}\right\}\begin{array}{l}K^*=2K\\ -2N+\\ N_0+1\end{array}\Bigg\}K>N-1,$$

其中 $a_j\in\Gamma_{j+N_0}$，$j=1,\cdots,\ N-N_0+I$，$a_j(j=N-N_0+I+1,\cdots,N-N_0+I+[K^*/2]$是 D 内不同的点。当 $K<0$ 时，则允许解在 $z=0$ 有不超过 $K'-1$ 级极点。

我们先证解析函数的问题 C_*' 存在唯一解，并给出复方程(2.1)(满足条件 C)之问题 C_*' 的解 $w(z)$所满足的估计式，再仿定理5.3使用参数开拓法证明 (2.1)之问题 C_*' 解的存在唯一性，进而导出 (2.1) 之问题 C_* 的可解性结果(见文[128]15))。

定理5.6 设复方程 (2.1) 满足条件 C，则其问题 C_*' 的解是存在唯一的。又其问题 C_* 的可解情况如下：

(1) 当 $K>N-1$，其问题 C_* 是可解的，其通解 $w(z)$ 包含有 $2K-N+1$ 个任意实常数；

(2) 当 $0\leqslant K\leqslant N-1$，问题 C_* 有 $N-K'\left(K'=\left[K+\frac{1}{2}\right]\right)$ 个可解条件，当这些条件满足时，其通解 $w(z)$ 包含有 $[K]+1$ 个任意实常数；

(3) 当 $K<0$，问题 C_* 有 $-2K+N-1$ 个可解条件。

特别，当 $\beta(t)=t$，$\overline{\lambda(t)}=iG(t)^{\frac{1}{2}}$，$r(t)=i\overline{G(t)}^{\frac{1}{2}}g(t)/2$，则可得到复方程 (2.1) 之间断 Riemann-Hilbert 边值问题的可解性结果。

对于复方程 (2.1) 更一般的复合边值问题的有关结果，可参看文[128]15)。

第四章　二阶椭圆型方程

在书[128]31）第一章§2中，已将平面区域D上一般的二阶线性一致椭圆型方程

(0.1)　$au_{xx}+2bu_{xy}+Cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=g$

（其中a，b，c，d，e，f，g都是D内点（x，y）的函数，a，b，$c\in W_p^1(D)$，d，e，f，$g\in L_p(\bar{D})$，$p>2$）都可转化为形如下的标准形式的方程

(0.2)　$u_{xx}+u_{yy}=a_1u_x+a_2u_y+a_3u+a_4$，

它可写成如下的复形式

(0.3)　$u_{z\bar{z}}=\mathrm{Re}[A_1(z)u_z]+A_2(z)u+A_3(z)$，

其中$u_{z\bar{z}}=\dfrac{1}{4}[u_{xx}+u_{yy}]$，$A_1=\dfrac{1}{2}[a_1+ia_2]$，$A_2=\dfrac{1}{2}a_3$，$A_3=\dfrac{1}{2}a_3$。在本章中，我们要讨论二阶标准形复方程（0.3）在区域D内解的性质与一些边值问题，这里设（0.3）的系数满足

(0.4)　A_1，A_2，$A_3\in L_p(\bar{D})$ 或 $L_{p,2}(\bar{D})$　（当D无界）

而方程(0.3)在D内的解$u(z)$都是指在D内连续可微的正则解，它在D内属于$D_{z\bar{z}}$，且几乎处处满足方程(0.3)。我们所说解的性质就是指它的极值（最大值、最小值）原理，表示式以及解序列的凝聚原理。本章中，我们还将讨论方程（0.3）的第一（Dirichlet）边值问题，第三（正则斜微商）边值问题以及poincaré边值问题。

§1　二阶椭圆型方程解的极值原理

大家知道，平面区域 D 内的调和函数在 D 内不能达到最大值和最小值，除非此调和函数是一常数。对于二阶椭圆型方程（0.3），只要其系数满足某些条件，它在区域 D 内的解也具有类似的性质，这就是所谓二阶椭圆型方程解的极值原理。极值原理有着重要的应用，也可用它证明方程（0.3）一些边值问题解的唯一性。

为讨论方便，并不失一般性，本章中我们均认为 D 是 z 平面上单位圆内的有界区域，且把二阶椭圆型方程（0.3）改写成

(1.1)　$Lu = u_{z\bar{z}} - \mathrm{Re}[A_1(z)u_z] - A_2(z)u = A_3(z),$

如果（1.1）的系数满足

(1.2)　$L_p[A_j(z),\ \bar{D}] \leqslant k < \infty,\ j=1,\ 2,\ 3,\ p>2,$

这里 p，k 都是实常数，则称方程（1.1）满足**条件 C**。又若系数 $A_2(z)$ 在 D 上几乎处处满足

(1.3)　$A_2(z) \geqslant 0,$

则把这样的条件 C 记作**条件 C_***，我们还把在 D 上几乎处处满足

(1.4)　　$A_3(z) \geqslant 0$ 与 $A_3(z) \leqslant 0$

的条件 C_* 分别记作**条件 C_*^+** 与**条件 C_*^-**。如果方程（1.1）的系数 $A_j(z)(j=1,\ 2,\ 3)$ 在闭区域 $\bar{D}$ 上连续，这样的条件 C_*^+ 与条件 C_*^- 分别记作**条件 C^+** 与**条件 C^-**。下面先讨论连续系数情形下的二阶方程（1.1）解的极值原理，然后再导出可测系数情形下方程（1.1）解的极值原理。

一、连续系数的二阶方程解的极值原理

引理 1.1　设 s 是圆域：$|z-z_0|<R(<\infty)$，又方程（1.1）

在$\bar{s}$上满足条件C^+，以$u(z)$表示(1.1)在$\bar{s}$上连续可微且在s内具有二阶连续偏微商的解，$u(z)$在点$z_1\in L=\{|z-z_0|=R\}$取非负的最大值，且$u(z_1)>u(z)$，当$z\in s$，则沿L在点z_1的l方向$\left(l\text{与}L\text{在}z_1\text{的外法线}\vec{n}\text{的交角}<\frac{\pi}{2}\right)$的极限

$$(1.5)\qquad \frac{\partial u}{\partial l}=\lim_{\substack{z\to z_1\\ z\in l}}\frac{u(z_1)-u(z)}{|z-z_1|}>0.$$

证 我们引入辅助函数

$$(1.6)\qquad V(z)=e^{-ar^2}-e^{-aR^2},\quad r=|z-z_0|,$$

其中a是待定的正常数。易知在s内$V(z)>0$，而在边界L上$V(z)=0$。经过直接计算，得

$$(1.7)\qquad LV=e^{-ar^2}\{-a+a^2r^2+a\mathrm{Re}[A_1(\overline{z-z_0})]\}-A_2V.$$

选取正常数a足够大，则知在圆环：$\bar{s}_1=\left\{\frac{R}{2}\leqslant|z-z_0|\leqslant R\right\}$上，

就有$LV>0$。作函数

$$(1.8)\qquad w(z)=u(z)-u(z_1)+\varepsilon V(z),\quad z\in s_1,$$

只要取正常数ε充分小，便可使$w(z)<0$，当$|z-z_0|=\frac{R}{2}$；又

$w(z)\leqslant 0$，当$r=R$时。现在要证

$$W(z)\leqslant 0,\quad \text{当 } z\in\bar{s}_1.$$

假如不然，则在$s_1=\left\{\frac{R}{2}<|z-z_0|<R\right\}$内，必存在一点$z_2$，使

$W(z_2)$在$\bar{s}_1$取到正的最大值。根据二元函数$W(z)$在$z=z_0$达到极大值的必要条件，知在此点

$$W_z=\frac{1}{2}(W_x-iW_y)=0,\quad W_{z\bar{z}}=\frac{1}{4}(W_{xx}+W_{yy})\leqslant 0,$$

又$-A_2W\leqslant 0$，因此$LW\leqslant 0$。然而从(1.8)，有

(1.9) $LW = Lu(z) - Lu(z_1) + \varepsilon LV > 0$, 当 $z \in s_1$.

此矛盾证明了 $W(z)$ 不能在 s_1 内达到最大值，即在 $\bar{s}_1$ 上有 $W(z) \leqslant 0$，也就有

$$u(z_0) - u(z) \geqslant \varepsilon V(z) = \varepsilon[V(z) - V(z_1)].$$

从上式便可得到，当 z 沿着 L 在点 z_0 的外法线方向趋于 z_1 时，就有

$$(1.10)\quad \frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{z \to z_1} \frac{u(z_1) - u(z)}{|z - z_1|} \geqslant \lim_{z \to z_1} \frac{\varepsilon[V(z) - V(z_1)]}{|z - z_1|}$$

$$= -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial n} = 2\varepsilon a r e^{-ar^2} > 0.$$

以 l 表示如引理 1.1 中所述的向量，则有 $\cos(l, n) > 0$，$\cos(l, s) > 0$，这里 $\bar{s}$ 是 L 在点 z_1 的一个切向量，且在点 z_1，$\frac{\partial u}{\partial s} = 0$，因而由 (1.10) 可得 (1.5) 式，即

$$(1.11)\quad \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial n}\cos(l, n) + \frac{\partial u}{\partial s}\cos(l, s) > 0.$$

使用这个引理，不难证明方程 (1.1) 如下的强最大值原理：

定理 1.1 设二阶方程 (1.1) 在区域 D 内满足条件 C^+，又以 $u(z)$ 表示 (1.1) 在 D 内具有二阶连续偏微商的古典解，那么 $u(z)$ 在 D 内不能取到非负的最大值，除非 $u(z)$ 是常数.

证 假如函数 $u(z)$ 在区域 D 内一点 z_1 达到非负的最大值，且 $u(z)$ 不是常数. 设 E 是函数 $u(z)$ 在 $\bar{D}$ 上取到非负最大值的闭点集，易知 $E \neq \bar{D}$，因此必存在一点 $z_0 \in D$，使 $u(z_0) < u(z_1)$，又 $\rho(z_0, \Gamma) > \rho(z_0, E) > 0$，其中 $\rho(z_0, \Gamma)$、$\rho(z_0, E)$ 分别表示点 z_0 到 D 的边界 Γ 与点 z_0 到 E 的距离. 以点 z_0 为心作圆 $\bar{s} = \{|z - z_0| \leqslant R\}$，与点集 E 相切于 z_1，且 $\bar{s}$ 与 Γ 不相交. 由于点 z_1 是 D 的内点，则有

$$u_z(z_0)=\frac{1}{2}[u_x(z_0)-iu_y(z_0)]=0,$$

这与（1.5）式矛盾，此矛盾证明了 $u(z)$ 不能在 D 内取非负的最大值，除非 $u(z)$ 是常数。

定理 1.2 设方程（1.1）在区域 D 内满足条件 C^-，又以 $u(z)$ 表示（1.1）在 D 内具有二阶连续偏微商的古典解，那么 $u(z)$ 在 D 内不能取到非正的最小值，除非 $u(z)$ 是常数。

证 令 $v(z)=-u(z)$，易知它是方程

$$(1.12)\quad v_{z\bar{z}}-\mathrm{Re}[A_1(z)v]-A_2(z)v=-A_3(z)$$

于区域 D 内的解，其中 $-A_3(z)\geqslant 0$，当 $z\in D$，因此由定理 1.1 知 $v(z)$ 不能在 D 内达到非负的最大值，除非 $v(z)$ 是常数，因而 $u(z)=-v(z)$ 不能在 D 内达到非正的最小值，除非 $u(z)$ 是常数。

从以上引理和定理的证明可以看出，如果条件 C^+ 与条件 C^- 中的系数 $A_2(z)=0$，此时 $A_2W\equiv 0$，这样便有如下的强极值原理：

推论 1.1 (1) 对于在区域 D 内满足条件 C^+ 且 $A_2(z)\equiv 0$ 的方程（1.1），它在 D 内的古典解 $u(z)$ 不能在 D 内达到最大值，除非 $u(z)\equiv$常数。

(2) 对于在区域 D 内满足条件 C^- 且 $A_2(z)\equiv 0$ 的方程（1.1），它在 D 内的古典解 $u(z)$ 不能在 D 内达到最小值，除非 $u(z)\equiv$常数。

还应指出，对于定理 1.1，条件 C^+ 中的 $A_2(z)\geqslant 0$ 是不可缺少的。例如二阶方程

$$(1.13)\quad u_{z\bar{z}}+\frac{1}{2}u=0,\ \text{即}\ u_{xx}+u_{yy}+2u=0,$$

对照方程（1.1）的形式，这里 $A_2(z)=-\frac{1}{2}<0$，当 $z\in\bar{D}$

$=\{0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\pi\}$，而方程（1.13）在 $\bar{D}$ 上具有古典解 $u=\sin x\sin y$，它在区域 $D=\{0<x<\pi,\ 0<y<\pi\}$ 内为正，但在 D 的边界 Γ 上等于 0，即在 D 内取到非负的最大值，但又不是常数.

二、可测系数的二阶方程解的极值原理

为了证明可测系数的二阶方程（1.1）解的强极大值原理，我们要先证明几个引理.

引理 1.2 对于满足条件 C_* 的二阶齐次方程

(1.14) $u_{z\bar{z}}-\mathrm{Re}[A_1(z)u_z]=0$,

以 $u(z)$ 表示它在区域 D 内的解，则 $u(z)$ 在 D 内既不能取到最大值，又不能取到最小值，除非 $u(z)\equiv$常数.

证 设 $w(z)=u_z$，则实值函数 $u(z)$ 在 D 内几乎处处满足的二阶方程（1.14）转化为复变函数 $w(z)$ 几乎处处满足的一阶椭圆型复方程

(1.15) $w_{\bar{z}}-\mathrm{Re}[A_1(z)w]=0$.

根据第三章定理 1.1，复方程（1.15）在区域 D 内的解可表示成

(1.16) $w(z)=\Phi(z)e^{\varphi(z)}$, $\varphi(z)=Tg$, $g(z)\in L_p(\bar{D})$.

由第三章定理 1.3，如果 $u(z)$ 在 D 内不是常数，那么 $w(z)$ 在 D 内的零点是孤立的. 由此推出，若 $u(z)$ 在 D 的内点 z_0 达到极值（极大值或极小值)，则在此点，$u_z=\frac{1}{2}[u_x-iu_y]=0$，由于 $w(z)=u_z$ 零点的孤立性，故 $u(z)$ 在 D 内的极值点也是孤立的. 以 L 表示 $u(z)$ 在点 z_0 邻域内的一条连续可微的等值线（Jordan 闭曲线)，其内部区域包含点 z_0. 以 s 表示 L 的切线正方向，α 是 s 与 x 轴的交角，则

(1.17) $\frac{\partial u}{\partial s}=0=u_x\cos\alpha+u_y\sin\alpha=(u_z+u_{\bar{z}})\cos\alpha-$

$i(u_{\bar{z}}-u_z)\sin\alpha=\overline{\lambda(z)}u_z+\lambda(z)u_{\bar{z}}=2\mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}u_z]=2\mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}w]$,

其中$\overline{\lambda(z)} = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$.只要等值线 L 与点 z_0 足够近,就可使于其上 $w(z) = u_z \neq 0$, 并由 (1.16) 与书[128]31) 第五章定理 2.2 的证明, 可从 (1.17) 导出

$$(1.18) \quad -1 = \frac{1}{2\pi}\Delta_L \arg\lambda(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta_L \arg\Phi(z)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Delta_L \arg w(z).$$

然而由 (1.16), 并根据辐角原理, 可得

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_L \arg w(z) > 0.$$

此矛盾证明了 $u(z)$ 不能在区域 D 内达到极值, 除非 $u(z) \equiv$ 常数.

引理 1.3 对于区域 D 上满足条件 C_*^+ 的二阶非齐次方程

(1.19) $u_{z\bar{z}} - \mathrm{Re}[A_1(z)u_z] = A_3(z)$,

以 $u(z)$ 表示它在闭区域 $\bar{D}$ 上连续的解, 则 $u(z)$ 在 $\bar{D}$ 上的最大值在 D 的边界 Γ 上达到.

证 如果我们能证明在区域 D 内任一闭圆 $\bar{s}$ 上 $u(z)$ 的最大值在 s 的边界 L 上达到, 那么就可推出引理 1.3 的结论是正确的. 不妨设 s 是单位圆 $|z|<1$, 因为这可通过自变量 z 的线性变换即达要求. 我们还可取方程序列

(1.20) $u_{z\bar{z}} - \mathrm{Re}[A_1^{(n)}(z)u_z] = A_3^{(n)}(z)\,(n = 1, 2, \cdots)$

使其系数 $A_1^{(n)}(z)$、$A_3^{(n)}(z)$ 均在 $\bar{s}$ 上连续可微, 且满足 $L_p[A_j^{(n)}(z), \bar{s}] \leqslant k < \infty$, $p > 2$, $j = 1, 3$, $A_3^{(n)}(z) \geqslant 0$, 又当 $n \to \infty$ 时, $L_p[A_j^{(n)}(z) - A_j(z), \bar{s}] \to 0$, $j = 1, 3$. 上述系数 $A_1^{(n)}(z)$、$A_3^{(n)}(z)$ 的存在性可由书[109]得知. 然后由第三章定理 5.3, 可从方程序列 (1.20) 分别求得 Dirichlet 边值问题的解 $w_n(z) = u_{nz}$, 使在边界 $L = \{|z| = 1\}$ 上有

(1.21) $\mathrm{Re}w_n(z) = \mathrm{Re}u_z$, $\mathrm{Im}w_n(1) = \mathrm{Im}u_z(1)$, $n = 1, 2, \cdots$.

根据第三章定理5.1，$w_n(z)$ 满足估计式

(1.22)　$C_\beta[w_n(z),\ \bar{s}]\leqslant M_1=M_1(p,\ k,\ u_z)$,

这里 $\beta=\beta(p)$ 是一正的常数. 由第三章定理3.6，可知能从 $\{w_n(z)\}$ 选取子序列在 $\bar{s}$ 上一致收敛到 $w(z)=u_z$，而

(1.23)　$u_n(z)=u(1)+2\mathrm{Re}\int_1^z w_n(z)dz$

在 $\bar{s}$ 上一致收敛到

(1.24)　$u(z)=u(1)+2\mathrm{Re}\int_1^z w(z)dz$.

由于方程（1.20）满足条件 C^+，从推论1.1得知 $u_n(z)$ 在 $\bar{s}$ 上满足强最大值原理，由此可推知，方程（1.19）的解 $u(z)$ 在 $\bar{s}$ 上的最大值在 s 的边界 L 上达到. 这样便可导出本引理的结论.

上述引理称为方程（1.19）解的弱最大值原理，下面再证明强最大值原理.

引理 1.4　在引理1.3的条件下，方程（1.19）在区域 D 内连续的解 $u(z)$ 不能在 D 内达到最大值，除非 $u(z)\equiv$ 常数.

证　假如 $u(z)$ 在 D 内达到最大值 M，又 $u(z)\not\equiv$ 常数，则我们总可在 D 内找到点 z_1 与圆 $\bar{s}=\{|z-z_0|\leqslant\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$，使 $u(z_1)=M$，且 $z_1\in\bar{s}$，又在 $L=\{|z-z_0|=\varepsilon\}$ 上，$u(z)$ 的最大值 M 与最小值 m 不相等，即 $m<M$. 在 s 上，我们求出方程(1.19)的齐次方程（1.14）的 Dirichlet 问题的解 $u_0(z)$，使在 $\bar{s}$ 的边界 L 上，有 $u_0(z)=u(z)$（这可先求出方程（1.15）在 $\bar{s}$ 上的 Dirichlet 边值问题的解 $w(z)$，适合边界条件

$$\mathrm{Re}w(z)=\mathrm{Re}u_z,\ \ \mathrm{Im}w(z_0+\varepsilon)=\mathrm{Im}u_z(z_0+\varepsilon),$$

而

$$u_0(z)=u(z_0+\varepsilon)+2\mathrm{Re}\int_{z_0+\varepsilon}^z w(z)dz$$

就是前面所要求的解 $u_0(z)$）. 根据引理1.2，在 s 内 $u_0(z)<M$.

又由引理 1.3，方程（1.19）在 s 上的解 $u(z)-u_0(z)$ 满足弱最大值原理，因此在 s 内，$u(z)\leqslant u_0(z)<M$，此矛盾证明了引理。

现在我们来叙述和证明二阶方程（1.1）的解的强最大值原理。

定理 1.3 设二阶方程（1.1）在区域 D 内满足条件 C_*^+，以 $u(z)$ 表示它在 D 内的正则解，则 $u(z)$ 在 D 内不能达到正的最大值，除非 $u(z)\equiv$常数。

证 假如 $u(z)$ 在区域 D 内的一点 z_1 达到正的最大值，则在点 z_1 足够小的邻域 s 内，$u(z)\geqslant 0$。由于方程（1.1）可改写成

$$(1.25)\quad u_{z\bar{z}}-\mathrm{Re}[A_1(z)u_z]=A(z),$$

其中 $A(z)=A_2(z)u+A_3(z)\geqslant 0$，因此从引理 1.4，$u(z)$ 在 s 内的点 z_1 达到最大值，所以 $u(z)\equiv$常数，由此可推知，在区域 D 内，$u(z)\equiv$常数。

此外，我们还可证明如下的强最小值原理。

定理 1.4 设二阶方程（1.1）在区域 D 内满足条件 C_*^-，用 $u(z)$ 表示它在 D 内的解，则 $u(z)$ 在 D 内不能达到负的最小值，除非 $u(z)\equiv$常数。

证 只要令 $v(z)=-u(z)$，则 $v(z)$ 是方程（1.12）（满足条件 C_*^+）于 D 内的解，根据定理 1.3，便可推出 $u(z)=-v(z)$ 具有本定理中所述的强极值性质。

以下结果是定理 1.3 和定理 1.4 的特殊情形。

推论 1.2 对于满足条件 C_* 的二阶齐次方程

$$(1.26)\quad Lu=u_{z\bar{z}}-\mathrm{Re}[A_1(z)u_z]-A_2(z)u=0,$$

以 $u(z)$ 表示它在闭区域 $\bar{D}$ 上的连续解，如果 $u(z)\not\equiv$常数，则 $u(z)$ 在 $\bar{D}$ 上正的最大值与负的最小值只能在 D 的边界 Γ 上达到。

我们还可用类似方法导出以下结果：

推论 1.3 在定理 1.3 的条件下，$u(z)$ 是方程（1.1）在

$\bar{s}=\{|z-z_0|\leqslant R\}(0<R<\infty)$ 上连续可微的解，又$u(z)$ 在点 $z_1\in L=\{|z-z_0|=R\}$取非负的最大值，且 $u(z_1)>u(z)$，当 $z\in s$，则（1.5）式仍成立。

证：根据后面的引理 2.3，可推知（1.1）的齐次方程(1.26)于 s 上存在着解 $\Psi(z)$，满足边界条件：$\Psi(t)=1$，当$|t|=R$，且 $0<\Psi(z)\leqslant 1$，当 $z\in S$，而$U(z)=u(z)/\Psi(z)$ 则是方程

$$U_{z\bar{z}}-\mathrm{Re}[A(z)U_z]=A_3(z)/\Psi(z),\quad A(z)=-2(\ln\Psi)_{\bar{z}}+A_1(z)$$

于S上的解. 由引理 1.4，$U(z)$ 仍在点 z_1 取非负的最大值，且 $U(z_1)>U(z)$，当 $z\in s$，又在点 z_1，$\dfrac{\partial\Psi}{\partial\nu}\geqslant 0$，因此我们可只就方程（1.19）来证明本推论.

使用引理 1.1 的证法，但这里选取 $V(z)$ 是方程（1.14）于 $\bar{s}_1=\left\{\dfrac{R}{2}\leqslant|z-z_0|\leqslant R\right\}$上的连续可微解，满足边界条件

$$V(t)=\begin{cases}0, & \text{当}|t|=R,\\ 1, & \text{当}|t|=R/2,\end{cases}$$

此解的存在性由后面的定理 3.3 得知，而$V(z)$ 对 S_1 的边界的切向 s 的微商$\dfrac{\partial v}{\partial s}=2\mathrm{Re}[itV_t]=0$，又外法向 n 的微商为

$$\frac{\partial V}{\partial n}=\begin{cases}2\mathrm{Re}(tV_t)/R, & \text{当}|t|=R,\\ -4\mathrm{Re}(tV_t)/R, & \text{当}|t|=R/2,\end{cases}$$

因为 $w(z)=V_z$ 可看成是一阶复方程（1.15）于 $\bar{s}_1$ 上的解，满足边界条件$\mathrm{Re}[itw(t)]=0$，它的标数为 0，易知 $w(z)=V_z$ 在 s_1 不恒为 0，故 $w(z)$ 在 s_1 的边界上没有零点，因而$\dfrac{\partial V}{\partial n}<0$，当$|t|=R$.

由于在 s_1 上有 $LW\geqslant 0$，其中 $LW=W_{z\bar{z}}-\mathrm{Re}[A_1(z)W_z]$，由定理 1.3，则知（1.8）式中的 $W(z)=u(z)-u(z_1)+\varepsilon V(z)$ 不能在 s_1 内达到正的最大值，于是在 S_1 内有 $W(z)\leqslant 0$，这样也可得到（1.10），（1.11），即（1.5）式成立.

§2 二阶方程解的表示定理与凝聚原理

本节将给出满足条件 C_* 的二阶方程 (1.1) 解的一种表示定理与凝聚原理. 从这种表示定理可以看出, 二阶方程的解与一阶复方程的解之间的关系. 而方程 (1.1) 解的凝聚原理是调和函数凝聚原理的推广. 这些结果在后几节讨论方程 (1.1) 的边值问题中将要用到.

一、二阶方程解的表示定理

我们把求二阶方程 (1.1) 在单位圆 $\bar{E}_1$ 上的连续解 $u(z)$, 且适合 Dirichlet 边界条件

(2.1) $\quad u(t)=r(t),\ t\in\Gamma=\{|t|=1\},\ C_\alpha^1[r(t),\ \Gamma]\leqslant l<\infty$

的第一边值问题简称为**问题 D**, 在上式中 $\alpha(0<\alpha<1)$、l 都是非负常数. 并把当 $r(t)=0$ 的问题 D 记作**问题 D_0**. 下面将证明关于方程 (1.1) 之问题 D 的几个引理.

引理 2.1 设二阶方程(1.1) 在单位圆 $E_1=\{|z|<1\}$上满足条件 C_*, 则其问题 D_0 的解 $u(z)\,(u_{z\bar{z}}\in L_p(\bar{E}_1)$ 可表示成

$$u(z)=\pi_0\rho=\frac{2}{\pi}\iint_{E_1}\ln\left|\frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z}\right|\rho(\zeta)\,d\sigma_\zeta, \tag{2.2}$$

其中 $\rho(z)$ 是 E_1 上的实值可测函数, $\rho(z)\in L_p(\bar{E}_1)$, $p>2$, 而 $\ln\left|\frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z}\right|$ 是调和函数问题 D 的 Green 函数. 又

$$\pi_1\rho=(\pi_0\rho)_z=-\frac{1}{\pi}\iint_{E_1}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{\bar{\zeta}}{1-\bar{\zeta}z}\right)\rho(\zeta)\,d\sigma_\zeta \tag{2.3}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\iint_{E}\frac{\rho^*(\zeta)}{\zeta-z}\,d\sigma_\zeta=\overline{(\pi_0\rho)_{\bar{z}}},\quad (\pi_0\rho)_{z\bar{z}}=\rho(z),$$

这里 $\rho^*(z)=\begin{cases}\rho(z), & z\in E_1,\\ -|z|^{-4}\rho\left(\frac{1}{\bar z}\right), & z\bar{\in} E_1,\end{cases}$ $\quad E=\{|z|<\infty\}$.

并且 $\pi_0\rho$、$\pi_1\rho$ 还满足估计式

$$(2.4)\quad C_\beta[\pi_1\rho,\ \bar E_1]\leqslant M_1L_p[\rho,\ \bar E_1],$$
$$C_\beta^1[\pi_0\rho,\ \bar E_1]\leqslant M_2L_p[\rho,\ \bar E_1],$$

此处 $\beta=1-2/p$, $M_j=M_j(p_0)$, $j=1,\ 2$.

证 可以看出，(2.2) 中的积分是有意义的，由于当 $|z|=1$, 时，$\ln\left|\frac{\zeta-z}{1-\bar\zeta z}\right|=0$，则可推知 $\pi_0\rho=0$。取 $\rho(z)=\mathrm{Re}[A_1(z)u_z]+A_2(z)u+A_3(z)$, $z\in E_1$，并由第一章定理，注意到

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{E_1}\frac{\bar\zeta\rho(\zeta)}{1-\bar\zeta z}d\sigma_\zeta=-\frac{1}{\pi}\iint_{E_1}\frac{\rho(\zeta)}{\frac{1}{\bar\zeta}-z}d\sigma_\zeta$$

$$=-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|>1}\frac{|\zeta_1|^{-4}\rho\left(\frac{1}{\bar\zeta_1}\right)}{\bar\zeta_1-z}d\sigma_{\zeta_1}\left(\zeta_1=\frac{1}{\zeta}\right),$$

因而有 (2.3) 式. 又因

$$\iint_{E_1}\left||z|^{-2}|z|^4\rho(\bar z)\right|^pd\sigma_z\leqslant\iint_{E_1}|\rho(\bar z)|^pd\sigma_z<\infty,$$

这表明 $\rho^*(z)\in L_{p,2}(E)$，使用第一章定理 3.3, 即知 (2.4) 的第一式成立. 又由 Green 公式，有

$$\int_\Gamma\pi_1\rho dz+\int_\Gamma\overline{\pi_1\rho dz}=2i\iint_{E_1}(\pi_1\rho)_{\bar z}d\sigma_z+\overline{2i\iint_{E_1}(\pi_1\rho)_{\bar z}d\sigma_z}$$

$$=2i\iint_{E_1}[\rho(z)-\rho(z)]d\sigma_z=0,$$

因此 $V(z)=\int_1^z\pi_1\rho dz+\overline{\pi_1\rho dz}$ 是 E_1 内的单值函数，注意到在 D

内，$[\pi_0\rho - V(z)]_{\bar z}=0$，$[\pi_0\rho - V(z)]_{z}=0$，则知 $\pi_0\rho - V(z)$ 是 z，$\bar z$ 的解析函数，又$[\pi_0\rho - V(z)]_{z=1}=0$，故

$$(2.5)\qquad \pi_0\rho=\int_1^z \pi_1\rho dz+\int_1^z \overline{\pi_1\rho dz}.$$

从上式及（2.4）的第一式，便知有（2.4）的第二式. 上面的讨论即已证明，$u(z)$ 是（1.1）之问题 D_0 的解.

以上引理对方程 $u_{z\bar z}=\rho(z)\in L_p(\bar E_1)$，$p>2$ 仍成立.

引理 2.2 在引理 2.1 的条件下，则方程（1.1）具有形如（2.2）的唯一解 $\psi(z)=\pi_0\rho$，$\rho(z)\in L_p(\bar E_1)$，$p>2$，并且此解 $\psi(z)$ 满足估计式

$$(2.6)\qquad C^1_\beta[\psi(z),\ \bar E_1]\leqslant M_3,\quad L_p[\rho(z),\ \bar E_1]\leqslant M_4,$$

这里 $\beta=1-2/p$，$M_j=M_j(p_0,\ k)$，$j=3,\ 4$.

证 将 $\psi(z)=\pi_0\rho$ 代入方程（1.1），并使用引理 2.1，得

$$(2.7)\qquad \rho(z)=\mathrm{Re}[A_1(z)\pi_1\rho]+A_2(z)\pi_0\rho+A_3(z).$$

如果我们能从积分方程（2.7）求出解 $\rho(z)\in L_p(\bar E_1)$，$p>2$，那么 $\psi(z)=\pi_0\rho$ 就是方程（1.1）的解.

由（2.4）可知，$\pi_0\rho$、$\pi\rho$ 是 $\rho(z)\in L_p(\bar E_1)$ 的全连续算子，所以（2.7）的右边也是全连续的. 这表明 Fredholm 定理可应用于方程（2.7）. 设 $\rho(z)\in L_p(\bar E_1)$是（2.7）的齐次积分方程

$$(2.8)\qquad \rho(z)=\mathrm{Re}[A_1(z)\pi_1\rho]+A_2(z)\pi_0\rho$$

的解，则 $u(z)=\pi_0\rho$ 是（1.1）的齐次方程（1.26）在 $\bar E_1$ 上的解，由于在 E_1 的边界 Γ 上，$u(z)=\pi_0\rho=0$，从推论 1.2 知$u(z)\equiv0$，故 $u_{z\bar z}=\rho(z)=0$，当 $z\in\bar E_1$. 根据 Fredholm 定理（见[117]1）第三章及[67]）则知非齐次积分方程（2.7）有唯一解 $\rho(z)\in L_p(\bar E)$，因而二阶非齐次方程（1.1）具有形如（2.2）的唯一解 $\psi(z)=\pi_0\rho$.

对于形如（2.2）的二阶非齐次方程（1.1）的解 $\psi(z)$ 满足估计式(2.6)，将在给出引理 2.3 以后证明，现在先讨论 $A_2(z)=0$

的特殊情形，即设 $\psi_0(z)$ 是方程

(2.9) $u_{z\bar{z}}=\mathrm{Re}[A_1(z)u_z]+A_3(z)$

在 E_1 上问题 D_0 的解，令 $w(z)=u_z$，则它是一阶复方程

(2.10) $w_{\bar{z}}=\mathrm{Re}[A_1(z)w]+A_3(z)$

于 E_1 上的解，并适合边界条件

(2.11) $\mathrm{Re}[itw(t)]=0,\ t\in\Gamma,$

其中 $\lambda(t)=-i\bar{t}$ 的标数 $K=-J$。根据第三章定理 5.1 可知$w(z)$ 满足估计式

(2.12) $C_\beta[w(z),\ \bar{E}_1]\leqslant M_3,\ L_p[w_{\bar{z}},\bar{E}_1]=L_p[\rho(z),\ \bar{E}_1]\leqslant M_4,$

这里 $\beta=1-2/p,\ M_j=M_j(p,\ k),\ j=3,\ 4$。又因

(2.13) $\psi_0(z)=2\mathrm{Re}\int_1^z w(z)dz,$

由 (2.12) 便可得到 $\psi_0(z)$ 所满足的估计式

(2.14) $C_\beta^1[\psi_0(z),\ \bar{E}_1]\leqslant M_5,\ L_p[\psi_{0z\bar{z}},\ \bar{E}_1]\leqslant M_6,$

此处 $M_j=M_j(p,\ k),\ j=5,\ 6$。

引理 2.3 对于单位圆 E_1 上满足条件 C_* 的二阶齐次方程 (1.26)，则它具有形如下的唯一解

(2.15) $\Psi(z)=1+\pi_0\rho,\ \rho(z)\in L_p(\bar{E}_1),\ p>2,$

并且此解 $\Psi(z)$ 满足估计式

(2.16) $C_\beta^1[\Psi(z),\ \bar{E}_1]\leqslant M_7,\ L_p[\Psi_{z\bar{z}},\ \bar{E}_1]\leqslant M_8,$

(2.17) $\Psi(z)\leqslant 1,\ \Psi(z)\geqslant M_9>0,$

这里 $\beta=1-2/p,\ M_j=M_j(p,\ k),\ j=7,\ 8,\ 9$。

证 欲证齐次方程 (1.26) 具有形如 (2.15) 的解 $\Psi(z)$，只要证明方程

(2.18) $u_{z\bar{z}}=\mathrm{Re}[A_1(z)u_z]+A_2(z)u+A_2(z)$

具有解 $\psi(z)=\pi_0\rho$。根据引理 2.2，以上方程具有唯一解 $\psi(z)=\Pi_0\rho,\ \rho(z)\in L_p(\bar{E}_1)$。而由推论 1.2 可知，方程 (1.26) 的解 $\Psi(z)=1+\pi_0\rho$ 在 $\bar{E}_1$ 上满足 $0\leqslant\Psi(z)\leqslant 1$。将 $\Psi(z)$ 代入(1.26)，注意到 $L_p[A_2(z)\Psi(z),\ \bar{E}_1]\leqslant k$，仿 (2.14) 的推导，可知 $\Psi(z)$

满足估计式（2.16）。余下还要证明$\Psi(z)$满足（2.17）的第二式。

由引理 2.2，知方程

(2.19)　$u_{z\bar{z}}=\mathrm{Re}[A_1(z)u_z]+A_2(z)$

在单位圆 E_1 上具有形如(2.2)的解 $v(z)$，并满足估计式(2.14)。作函数 $W(z)=e^{v(z)}-\Psi(z)$，则在 E_1 上，有

$$LW=Le^{v(z)}-L\Psi=e^{v(z)}\{v_{z\bar{z}}+|v_z|^2-\mathrm{Re}A_1(z)v_z - A_2(z)\}=e^{v(z)}|v_z|^2\geqslant 0,$$

而在边界 Γ 上有 $W(z)=e^{v(z)}-\Psi(z)\leqslant 0$，故由定理 1.3，在 $\bar{E}_1$ 上有 $e^{v(z)}-\Psi(z)\leqslant 0$，故 $\Psi(z)\geqslant e^{v(z)}\geqslant e^{-M_5}=M_9>0$。

现在回来证明引理 2.2 中的（2.6）式。我们可把其中的解 $\psi(z)$ 表示成 $\psi(z)=\Psi(z)\bar{\psi}_0(z)$，这里 $\Psi(z)$ 是引理 2.3 中的函数，而 $\psi_0(z)$ 是方程

(2.20)　$\psi_{0z\bar{z}}=\mathrm{Re}\{[-2(\ln\Psi)\bar{z}+A_1(z)]\psi_{0z}\}+A_3(z)/\Psi(z)$

形如（2.2）的解，满足形如（2.14）的估计式。根据（2.14）、（2.16）即得 $\psi(z)$ 的估计式（2.6）。

下面叙述并证明二阶方程（1.1）解的表示定理。

定理 2.1　设二阶方程（1.1）在区域 $D(0\in D)$ 上满足条件 C_*，又 $u(z)$ 是（1.1）于 D 内的正则解，则它可表成

(2.21)　$u(z)=\left[2\mathrm{Re}\int_0^z w(z)dz+C_0\right]\Psi(z)+\psi(z),$

其中$\psi(z)=\pi_0\rho$，$\Psi(z)=1+\pi_0\sigma$，$\sigma(z)\in L_p(\bar{D})$、$p>2$，且 $\psi(z)$、$\Psi(z)$ 分别满足估计式（2.6）、（2.16）、（2.17），C_0 是实常数。又 $w(z)$ 可表示成

(2.22)　$w(z)=\Phi(z)e^{\varphi(z)},$

这里 $\Phi(z)$是区域 D 内的解析函数，$\varphi(z)=Tg=-\dfrac{1}{\pi}\iint\limits_D\dfrac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta$

满足估计式

(2.23) $C_\beta[\varphi(z), \bar{D}]\leqslant M_{10}$, $L_p[\varphi_{\bar z}, \bar{D}]\leqslant M_{11}$,

此处$\beta=1-2/p$, $M_j=M_j(p, k)$, $z=10, 11$.

证 我们设$A_j(z)=0$, $z\bar{\in}D$, $j=1, 2, 3$. 由引理2.2，知二阶方程

(2.24) $\Psi_{z\bar z}-\mathrm{Re}[A_1(z)\psi_z]-A_2(z)\psi=A_3(z)$

存在唯一解$\psi(z)=\pi_0\rho$，满足估计式（2.6）. 又由引理2.3知二阶齐次方程

(2.25) $\Psi_{z\bar z}-\mathrm{Re}[A_1(z)\Psi_z]-A_2(z)\Psi=0$

存在唯一正解$\Psi(z)=1+\pi_0\sigma$，满足估计式（2.16）、(2.17). 设

(2.26) $U(z)=[u(z)-\psi(z)]/\Psi(z)$,

通过计算可知$U(z)$是以下方程在区域D内的解.

(2.27) $U_{z\bar z}-\mathrm{Re}[A(z)U_z]=0$,

此处$A(z)=-2(\ln\Psi)_{\bar z}+A_1(z)$ 满足条件

(2.28) $L_p[A(z), \bar{D}]\leqslant k_1=k_1(p, k, D)$,

上式是由条件C_*与(2.16)、(2.17)得出的. 这样一来，$w(z)=U_z$是一阶复方程

(2.29) $w_{\bar z}-\mathrm{Re}[A(z)w]=0$

于区域D内的正则解. 根据第三章定理1.8，$w(z)$可表示成（2.22）式，其中$\varphi(z)=Tg$满足估计式（2.23），最后从$w(z)=U_z$可得$U(z)=2\mathrm{Re}\int_0^z w(z)\,dz+U(0)$，取$C_0=U(0)=[u(0)-\psi(0)]/\Psi(0)$，因此$u(z)$具有形如(2.21)的表示式.

二、二阶方程解序列的凝聚原理

使用前面所得的一些结果，我们可以给出二阶方程（1.1）解序列的凝聚原理，下面先讨论更一般的情形，即考虑在区域D上满足条件C的二阶方程

(2.30) $u_{z\bar z}=\mathrm{Re}[A_1^{(n)}(z)u_z]+A_2^{(n)}(z)u+A_3^{(n)}(z), n=1, 2,\cdots$,

其中$A_j^{(n)}(z)$与$A_j(z)(z=1, 2, 3)$满足如下的关系

$(2.31)\quad L_p[A_j^{(n)}(z)-A_j(z),\bar{D}]\to 0$，当 $n\to\infty, j=1,2,\ 3, p>2$。

定理 2.2 设$\{u_n(z)\}$是二阶方程（2.30）于区域D内的解序列，又$\{u_n(z)\}$、$\{u_{nz}\}$在D内闭一致有界，则可从$\{u_n(z)\}$选取子序列$\{u_{n_k}(z)\}$在D内闭一致收敛到方程（1.1）在区域D内的解$u(z)$。

证 根据表示定理2.1，二阶方程（2.30）于区域D内的解$u_n(z)$可表成

$$(2.32)\quad u_n(z)=\left[2\mathrm{Re}\int_0^z w_n(z)dz+C_n\right]\Psi_n(z)+\psi_n(z),$$

其中C_n是实常数，$\psi_n(z)$，$\Psi_n(z)$，$w_n(z)$分别是下列方程的解

$$(2.33)\quad \psi_{nz\bar{z}}-\mathrm{Re}[A_1^{(n)}\psi_{nz}]-A_2^{(n)}(z)\psi_n=A_3^{(n)}(z),$$

$$(2.34)\quad \bar{\psi}_{nz\bar{z}}-\mathrm{Re}[A_1^{(n)}(z)\bar{\psi}_{nz}]-A_2^{(n)}(z)\Psi_n=0,$$

$$(2.35)\quad w_{n\bar{z}}-\mathrm{Re}[A^{(n)}(z)w_n]=0,$$

这里$A^{(n)}(z)=-2(\ln\Psi_n(z))_{\bar{z}}+A_1^{(n)}(z)$，而$\psi(z)$、$\Psi_n(z)$满足估计式（2.6）、（2.16）、（2.17），又$w_n(z)$可表示成

$$(2.36)\quad w_n(z)=\Phi_n(z)e^{\varphi_n(z)},$$

其中$\varphi_n(z)=Tg_n$满足估计式（2.23），又$\Phi_n(z)$是区域D内的解析函数。由定理的条件，$\{u_n(z)\}$、$\{u_{nz}\}$在D内闭一致有界，又因

$$(2.37)\quad \begin{aligned} w_n(z)=U_{nz}&=\{[u_n(z)-\psi_n(z)]/\Psi_n(z)\}_z\\ &=\{\Psi_n(z)[u_{nz}-\psi_{nz}]-[u_n(z)-\psi_n(z)]\Psi_{nz}\}\\ &\quad/[\Psi_n(z)]^2, \end{aligned}$$

故从(2.6)、(2.16)、(2.17)可得知，函数序列$\{w_n(z)\}$在D内闭一致有界，则可从$\{\psi_n(z)\}$、$\{\Psi_n(z)\}$、$\{\Psi_{nz}\}$选取子序列不妨设原序列在$\bar{D}$上分别一致收敛到$\psi(z)$、$\Psi(z)$、$\Psi_{\bar{z}}$。将$W_n(z)=\Psi_{nz}$代入方程（2.34），注意到当$n\to\infty$时，$L_p[A_1^{(n)}(z)-A_1(z)\bar{E}_1]\to 0$，$L_p[A_2^{(n)}(z)\Psi_n(z)-A_2(z)\Psi(z),\bar{E}_1]\to 0$，以及$L_p[A^{(n)}(z)-A(z),\bar{D}]\to 0$，这里$A(z)=-2[\ln\Psi(z)]_{\bar{z}}+A_1(z)$，应用第三章定理3.6，可

知$\psi(z)$、$\Psi(z)$分别是方程（2.24）、（2.25）于区域E_1上的解，具有形式$\psi(z)=\pi_0\rho$，$\Psi(z)=1+\pi_0\sigma$，$\rho(z)$、$\sigma(z)\in L_p(\bar{E}_1)$，并可从$\{w_n(z)\}$选取子序列在$D$内闭一致收敛到方程（2.29）于区域$D$内的解$w(z)$，注意到$u_n(z)$的表示式（2.32），其中$C_n=[u_n(0)-\psi_n(0)]/\Psi_n(0)$，那么便知可从$\{u_n(z)\}$选取子序列在$D$内闭一致收敛到$u(z)$，具有（2.21）的形式，其中$C_0$是数列$\{C_n\}$所选相应子列的极限值，而$u(z)$就是二阶方程（1.1）于区域$D$内的解。

特别，对于同一个方程（1.1），其解序列的凝聚原理仍然成立，即

推论2.1 设二阶方程（1.1）在区域D上满足条件C，又$\{u_n(z)\}$是（1.1）于D内的解序列，$\{u_n(z)\}$、$\{u_{nz}\}$在D内闭一致有界，则可从$\{u_n(z)\}$选取子序列在D内闭一致收敛到（1.1）的解。

应当指出．定理2.2与推论2.1中关于$\{u_{nz}\}$在区域D内闭一致有界性的条件可以取消（可参考书[128]31）第六章§2），但从后面的使用来说，以上的定理和推论已足够了。

最后，还要介绍二阶齐次方程（1.26）解的唯一性定理。

定理2.3 设方程（1.26）在区域D内满足条件C_*，又D_*是D的一个子区域，若（1.26）在D内的解$u(z)\equiv 0$，当$z\in D_*$，则$u(z)\equiv 0$，当$z\in D$。

证 由定理2.1，$w(z)=U_z=[\Psi u_z-u\Psi_z]/\Psi^2$是方程（2.29）于$D$内的解，它在$D_*$内等于0，故$w(z)\equiv 0$，当$z\in D$，再由（2.21）即知$u(z)\equiv 0$，$z\in D$。

§3 二阶方程的第一、第三边值问题

后面，我们考虑区域 D 是 z 平面上的有界 $N+1$ 连通区域，其边界 $\Gamma\in C_\alpha^1(0<\alpha<1)$，它由 $N+1$ 个分支 $\Gamma_j(j=0, 1,\cdots, N)$ 组成，而 $\Gamma_1,\cdots, \Gamma_N$ 在 Γ_0 所围的有界区域内，正如第三章§5中那样，不妨设 D 是单位圆内的 $N+1$ 连通圆界区域，其边界圆周 $\Gamma_j=\{|z-z_j|=r_j\}$，$j=0,1,\cdots, N$，$\Gamma_{N+1}=\Gamma_0=\{|z|=1\}$，且 $z=0\in D$。因为这可通过把一般区域 D 共形映射到上述 $N+1$ 连通圆界区域 G 的单叶解析函数 $\zeta=\zeta(z)$（见书[128]23）第三章,[53]第五章）的变换即达要求。以 $z(\zeta)$ 表示 $\zeta(z)$ 的反函数，令 $U(\zeta)=u[z(\zeta)]$，由于

$$(3.1)\qquad U_\zeta=u_z z'(\zeta),\quad U_{\zeta\bar\zeta}=u_{z\bar z}|z'(\zeta)|^2,$$

则在一般区域 D 内的二阶方程（1.1）转化为在圆界区域 G 内形如下的二阶方程

$$(3.2)\qquad U_{\zeta\bar\zeta}-|z'(\zeta)|^2\{\mathrm{Re}[A_1(z(\zeta))U_\zeta/z'(\zeta)]-A_2(z(\zeta))U\}$$
$$=|z'(\zeta)|^2A_3(z(\zeta)),$$

由书[117]1）第一章定理1.8可知

$$\overline{z'(\zeta)}A_1(z(\zeta)),\quad |z'(\zeta)|^2A_2(z(\zeta)),$$
$$|z'(\zeta)|^2A_3(z(\zeta))\in L_p(\bar D).$$

因此，以下我们只讨论圆界区域 D 上的方程（1.1）。

一、二阶方程的第一边值问题

问题 D 求二阶方程（1.1）在闭区域 $\bar D$ 上具有一阶连续偏微商的解 $u(z)$，使它适合边界条件

$$(3.3)\qquad u(t)=r(t),\quad t\in\Gamma,\quad C_\alpha^1[r(t),\ \Gamma]\leqslant l<\infty,\quad 0<\alpha<1.$$

并把方程（1.1）当 $A_3(z)=0$，$r(t)=0$ 时的问题 D 记作**问题 D_0**。

定理 3.1 设二阶方程 (1.1) 在区域 D 上满足条件 C_*，则其问题 D 的解是唯一的。

证 设 $u_1(z)$、$u_2(z)$ 是方程 (1.1) 问题 D 的两个解，令 $u(z)=u_1(z)-u_2(z)$，易知它是齐次方程 (1.26) 之问题 D_0 的解，满足边界条件 $u(t)=0$，当 $t\in\Gamma$. 根据推论 1.2 得知 $u(z)\equiv 0$，即 $u_1(z)\equiv u_2(z)$，$z\in D$。

现在我们先给出方程 (1.1) 问题 D 解的先验估计式，然后再证明 (1.1) 之问题 D 解的存在性

定理 3.2 在定理 3.1 的条件下，方程 (1.1) 之问题 D 的解 $u(z)$ 满足估计式

(3.4) $\quad C^1_\beta[u(z),\ \bar{D}]\leqslant M_1,\ L_p[u_{z\bar{z}},\ \bar{D}]\leqslant M_2,$

这里 $\beta=\min(\alpha,\ 1-2/p)$，$M_j=M_j(p,\ k,\ \alpha,\ l,\ D)$，$j=1,\ 2$。

证 先证方程 (1.1) 之问题 D 的解 $u(z)$ 满足有界性的估计式

(3.5) $\quad C[u(z),\ \bar{D}]=\max\limits_{z\in\bar{D}}|u(z)|\leqslant M_3=M_3(p,\ k,\ \alpha,\ l,\ D)$。

根据定理 2.1，方程 (1.1) 问题 D 的解可表示成

(3.6) $$u(z)=\left[2\mathrm{Re}\int_0^z w(z)dz+C_0\right]\Psi(z)+\psi(z)=U(z)\Psi(z)+\psi(z),$$

其中 $\psi(z)$、$\Psi(z)$ 满足估计式 (2.6)、(2.16)、(2.17)。从边界条件 (3.3)，可得上式中的函数 $U(z)$ 满足的边界条件

(3.7) $\quad U(t)=R(t)=[r(t)-\psi(t)]/\Psi(t)$，$t\in\Gamma$。

而函数 $w(z)=U_z=\Phi(z)e^{\varphi(z)}$ 是一阶复方程 (2.29) 于区域 D 内的解，并满足边界条件

(3.8) $\quad \mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)]=\tau(t)$，$t\in\Gamma$。

这是将 (3.7) 作关于边界圆周 $\Gamma_j=\{|z-z_j|=r_j\}$ 中 $z-z_j=r_je^{i\theta}$ 的幅角 θ 的微商得到的，因而知 $\overline{\lambda(t)}=i(t-z_j)$，$2\tau(t)=\dfrac{\partial R(t)}{\partial\theta}$.

$z\in\Gamma_j$, $j=0,1,\cdots,N$. 从(3.3)、(2.6)、(1.16)与(2.17)可得

(3.9) $C_\beta^1[R(t),\ \Gamma]\leqslant l_1<\infty$, $C_\beta[\tau(t),\ \Gamma]\leqslant l_1$,

其中 $l_1=l_1(p,k,\alpha,l,D)$. 而 $U(z)$ 是二阶齐次方程

(3.10) $U_{z\bar z}-\mathrm{Re}[A(z)U_z]=0$, $A(z)=-2(\ln\Psi)_{\bar z}+A_1(z)$.

于区域 D 内的解. 根据引理 1.2 与(3.9)便知, $U((z)$ 在 $\bar D$ 上满足有界性的估计式

(3.11) $C[U(z),\bar D]=\max\limits_{z\in\bar D}|U(z)|\leqslant M_4=M_4(p,k,\alpha,l,D)$.

下面用反证法证明 $w(z)=U_z$ 在 $\bar D$ 上满足

(3.12) $C[w(z),\bar D]\leqslant M_5=M_5(p,k,\alpha,l,D)$.

因为否则, 相应有一阶复方程序列

(3.13) $w_{\bar z}=\mathrm{Re}[A^{(n)}(z)w](n=1,2,\cdots)$

(其中 $A^{(n)}(z)$ 满足与 $A(z)$ 相同的条件)的解序列 $w_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$, 而当 $n\to\infty$ 时, $C[w_n(z),\bar D]=H_n\to\infty$, 不妨设 $H_n\geqslant1$, 作 $W_n(z)=w_n(z)/H_n$, 由于 $W_n(z)$ 适合类似于(3.8)的边界条件, 即

(3.14) $\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}W_n(t)]=\tau_n(t)$, $t\in\Gamma$,

$\lambda(t)$ 的标数 $k=N-1$, 注意到 $C[W(z),\bar D]\leqslant1$, 仿第三章定理 5.1, 可证

(3.15) $C_\beta[W_n(z),\bar D]\leqslant M_6=M_6(p,k,\alpha,l,D)$.

因而可从 $\{W_n(z)\}$ 选取子序列不妨设原序列在 $\bar D$ 上一致收敛到 $W_0(z)$. 由于 $V_n(z)=U_n(z)/H_n$ 是一阶复方程

(3.16) $V_{n\bar z}=\overline{W_n(z)}$

在区域 D 上的解, 满足边界条件

(3.17) $\mathrm{Re}[iV_n(t)]=0$, $t\in\Gamma$.

因而也有估计式

(3.18) $C_\beta[V_n(z),\bar D]\leqslant M_7=M_7(p,k,\alpha,l,D)$.

注意到 $U_n(z)$ 满足(3.11), 因而 $\{V_n(z)\}$、$\{V_{nz}\}=\{W_n(z)\}$ 在 $\bar D$

上一致收敛到 0。然而由 $C[W_n(z),\bar{D}]=1$ 可推出在 $\bar{D}$ 上有点 z_*，使 $|W_0(z_*)|=1$。此矛盾证明了(3.12)式成立。然后仿照导出(.15)的方法，可证 $w(z)$ 满足形如(3.15)的估计式，再由(3.5)、(3.6)便知 $u(z)$ 满足(3.4)的第一式。将 $u(z)$ 代入方程(1.1)即知有(3.4)的第二式。

定理 3.3 设二阶方程(1.1)满足条件 C_*，则其问题 D 是可解的。

证 按照定理 3.2 的证明，我们可将求解方程(1.1)在 $N+1$ 连通区域 D 上问题 D 的解 $u(z)$ 转化为求解一阶复方程(2.29)满足边界条件(3.8)之 Riemann-Hilbert 边值问题 A 的解 $w(z)$。注意到(3.8)中 $\lambda(t)$ 的标数 $k=N-1$，仿第三章定理 5.2、定理 5.3 的证法，可证复方程(2.29)适合如下边界条件与点型条件之问题 B 存在唯一解 $w(z)$。

(3.19) $\operatorname{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)]=\tau(t)+h(t),\ t\in\Gamma,$

$$h(t)=\begin{cases}h_0, & t\in\Gamma_0,\\ 0, & t\in\Gamma-\Gamma_0,\end{cases}$$

(3.20) $\operatorname{Im}[\overline{\lambda(a_j)}w(a_j)]=b_j,\ a_j\in\Gamma_j,\ j=1,\ \cdots,\ N,$

这里 h_0 是待定实常数，a_j 是 Γ_j 上的固定点 $(j=1,\ \cdots,\ N)$，b_j $(j=1,\ \cdots,\ N)$，是任意取定的实常数。由于

(3.21) $\operatorname{Re}\int_{\Gamma_j}W(z)\,dz=\operatorname{Re}\int_{\Gamma_j}\overline{\lambda(t)}w(t)\,d\theta=\int_{\Gamma_j}\tau(t)d\theta$

$\qquad =0,\ j=1,\ \cdots,\ N,$

可知由(3.6)式中 $\operatorname{Re}\int_0^z w(z)dz$ 所确定的函数在区域 D 内单值，并由此推出 $\operatorname{Re}\int_{\Gamma_0}w(z)dz=\int_{\Gamma_0}[\tau(t)+h_0]d\theta=0$，因而 $h_0=0$。我们适当选取(3.6)式中的常数 C_0，使 $u(1)=r(1)$，如果函数 $u(z)$ 还满足条件

(3.22) $u(a_j)=r(a_j)$, $j=1, \cdots, N$,

那么此函数 $u(z)$ 便是方程(1.1)之问题 D 的解. 否则, 与前相仿, 可求出复方程(2.29)适合边界条件与点型条件

(3.23) $\operatorname{Re}[\overline{\lambda(t)}w_k(t)]=0$, $t\in\Gamma$, $k=1, \cdots, N$,

(3.24) $\operatorname{Im}[\overline{\lambda(a_j)}w_k(a_j)]=\delta_{jk}=\begin{cases}1, & j=k,\\ 0, & j\neq k, \quad k=1,\cdots,N\end{cases}$

之问题 B 的解 $w_k(z)$ $(k=1, \cdots, N)$ 易知它们线性无关, 并可确定方程(1.1)于区域 D 内的单值解

(3.25) $u_k(z)=\left[2\operatorname{Re}\int_1^z w_k(z)\,dz\right]\Psi(z)$, $k=1, \cdots, N$.

还可证明行列式

(3.26) $$J=\begin{vmatrix} u_1(a_1) & \cdots & u_N(a_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ u_1(a_N) & \cdots & u_N(a_N)\end{vmatrix}\neq 0.$$

假如不然, 存在不全为 0 的实常数 $C_1,\cdots,C_N$, 使

$u_0(z)=\sum_{k=1}^N c_k u_k(z)\not\equiv 0, z\in D$, 但 $u_0(a_j)=0, j=1,\cdots,N$. 从(3.23)、(3.25)可推知 $u_0(z)$ 是二阶齐次方程(1.26)在 D 上的解, 满足齐次边界条件 $u_0(t)=0$, $t\in\Gamma$. 从定理 3.1 知 $u_0(z)\equiv 0$, $z\in D$. 此矛盾证明了(3.26)式成立. 因此, 可从线性代数方程组

(3.27) $$\begin{cases} c_1u_1(a_1)+\cdots+c_Nu_N(a_1)=u(a_1)-r(a_1),\\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\\ c_1u_1(a_N)+\cdots+c_Nu_N(a_N)=u(a_N)-r(a_N)\end{cases}$$

求得唯一解 $c_1,\cdots,c_N$, 而

(3.28) $$U(z)=u(z)-\sum_{k=1}^N c_k u_k(z)$$

是方程(2.27)满足边界条件(3.7)的解, 而 $u(z)=U(z)\Psi(z)$

$+\psi(z)$便是二阶非齐次方程(1.1)之问题D的解。

现在给出二阶方程(1.1)特殊的边值问题D的一些结果，作为推论。

推论 3.1 对于满足条件C_*的二阶非齐次方程(1.1)，它在$N+1$连通区域D上存在满足边界条件$\psi(t)=0$，$t\in\Gamma$之问题D的解$\psi(z)$，又相应之齐次方程(1.26)在区域D上存在满足边界条件$\Psi(t)=1$，$t\in\Gamma$之问题D的解$\Psi(z)$，它们都在$\bar{D}$上满足形如(3.4)的估计式，又$\Psi(z)$还满足

$$(3.29)\qquad \Psi(z)\leqslant 1,\ \Psi(z)\geqslant M_8>0,$$

这里$M_8=M_8(p,\ k,\ D)$。

证 关于所述解$\psi(z)$、$\Psi(z)$的存在性由定理3.3得知，而它们满足估计式(3.4)是定理3.2的结论，又由推论1.2可得(3.29)的第一式，而第二式可仿(2.17)的第二式那样证明，只要将那里的E_1改为D，$v(z)$改为方程(2.19)在D上之问题D的解，满足边界条件$v(t)=0$，$t\in\Gamma$。

二、二阶方程的第三边值问题

问题 O 所谓二阶方程(1.1)在区域D上的第三边值问题，即正则斜微商问题，即求(1.1)在闭区域$\bar{D}$上的连续可微解$u(z)$，使它满足边界条件

$$(3.30)\qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}+2\sigma(t)u(t)=2\tau(t)+2h(t),\ t\in\Gamma,\ u(0)=b_0,$$

这里$\frac{\partial}{\partial \nu}$表示沿边界$\Gamma$上的点在$\vec{\nu}$方向的方向微商，而$\vec{\nu}$与外法线方向$\vec{n}$的交角$(\nu,n)$小于$\frac{\pi}{2}$，$\sigma(t)\geqslant 0$，$h(t)$如(3.19)中所设，$b_0$是实常数。由于

(3.31) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\beta = (u_z + u_{\bar z})\cos\beta \\ \qquad + i(u_z - u_{\bar z})\sin\beta = \overline{\lambda(t)}u_t + \lambda(t)u_{\bar t} \\ \quad = 2\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}\,u_t], \end{cases}$$

其中$\overline{\lambda(t)} = \cos\beta + i\sin\beta = e^{i\beta(t)}$，$\beta(t)$ 是点 $t\in\Gamma$ 上的 x 轴方向与 $\vec{\nu}$ 的交角，这样一来，边界条件(3.30)可写成复形式

(3.32) $\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}u_t] + \sigma(t)u = \tau(t) + h(t)$，$t\in\Gamma$，$u(0) = b_0$。

我们设 $\lambda(t)$、$\sigma(t)$、$\tau(t)$、b_0 满足条件

(3.33) $$\begin{cases} C_\alpha[\lambda(t),\Gamma]\leqslant l,\ C_\alpha[\sigma(t),\Gamma]\leqslant l,\ C_\alpha[\tau(t),\ \Gamma]\leqslant l, \\ \cos(\nu,n)>0,\ \sigma(t)\geqslant 0,\ t\in\Gamma,\ |b_0|\leqslant l, \end{cases}$$

这里 $\alpha(0<\alpha<1)$、$l(0<l<\infty)$ 都是非负常数. 特别当 $\vec{\nu}=\vec{n}$，$\sigma(t)=0$，$t\in\Gamma$，则上述问题 O 就是 Neumann（第二）边值**问题 N**. 我们还将 $A_3(z)=0$，$\tau(t)=0$ 的问题 O 记作**问题 O_0**。

定理 3.4 对于满足条件 C_* 的二阶方程(1.1)，其问题 O 的解是唯一的。

证 设 $u_1(z)$、$u_2(z)$是方程(1.1)之问题 O 的解，则 $u(z)=u_1(z)-u_2(z)$是齐次方程(1.26)的问题 O_0 的解，且 $u(0)=u_1(0)-u_2(0)=0$. 如果 $u(z)\not\equiv 0$，$z\in D$，则仿 (3.6) 式，但在这里 $u(z)=U(z)\Psi(z)$，$\Psi(z)$是齐次方程(1.26) 如推论 3.1 中所述的解，而$U(z)=u(z)/\Psi(z)$是方程

(3.34) $U_{z\bar z} - \mathrm{Re}[A(z)U_z] = 0$，$A(z) = -2(\ln\Psi)_{\bar z} + A_1(z)\in L_p(\bar D)$

于闭区域 $\bar D$ 上的连续解，$U(0)=u(0)/\Psi(0)=0$，又$U(z)$满足边界条件

(3.35) $\dfrac{\partial U}{\partial \nu} + \left[\sigma(t) + \dfrac{\partial \Psi}{\partial \nu}\right]U(t) = h(t)$，$t\in\Gamma$，

且 $U(z)\not\equiv 0, z\in D$. 由推论 1.2，$\dfrac{\partial\Psi}{\partial\nu}\geqslant 0$，因而$\sigma(t)+\dfrac{\partial\Psi}{\partial\nu}\geqslant 0$。

根据引理 1.2，$U(z)$在 $\bar{D}$ 上的最大值 M 与最小值 m 分别在边界 Γ 上的点 t_1，t_2 达到，而且 $M>0$，$m<0$. 由推论 1.3，知在点 t_1，有

$$\frac{\partial U}{\partial \nu}+\left[\sigma(t)+\frac{\partial \Psi}{\nu v}\right]U(t)=h(t)>0,$$

类似地可知在点 t_2，

$$\frac{\partial U}{\partial \nu}+\left[\sigma(t)+\frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\right]U(t)=h(t)<0,$$

此矛盾证明了 $U(z)\equiv 0$，即 $u_1(z)\equiv u_2(z)$，$z\in D$.

其次，将由以上定理导出方程(1.1)之问题 O 的解所满足的估计式.

定理 3.5 设 $u(z)$是二阶方程(1.1)（满足条件 C_*）之问题 O 的解，则 $u(z)$满足估计式

(3.36) $C_\beta^1[u(z),\ \bar{D}]\leqslant M_9$，$L_p[u_{z\bar{z}},\ \bar{D}]\leqslant M_{10}$，

其中 $\beta=\min(\alpha,1-2/p)$，$M_j=M_j(p,k,\alpha,l,D)$，$j=9,10$.

证 先证 $u(z)$满足估计式

(3.37) $C^1[u(z),\bar{D}]=C[u(z),\bar{D}]+C[u_z,\bar{D}]\leqslant M_{11}$

$=M_{11}(p,k,\alpha,l,D)$.

假如不然，则有与 $A_j(z)(j=1,2,3)$，$\lambda(t),\sigma(t)$，$\tau(t)$满足相同条件的系数序列$\{A_j^{(n)}(z)\}(j=1,2,3)$、$\lambda_n(t)$、$\sigma_n(t)$、$\tau_n(t)$，且当 $n\to\infty$时，$A_j^{(n)}(z)$在 D 上弱收敛到 $A_j^{(0)}(z)(j=1,2,3)$，$\lambda_n(t)$、$\sigma_n(t)$、$\tau_n(t)$在 Γ 上分别一致收敛到 $\lambda_0(t)$、$\sigma_0(t)$、$\tau_0(t)$，又方程

(2.38) $u_{z\bar{z}}-\mathrm{Re}[A_1^{(n)}(z)u_z]-A_2^{(n)}(z)u=A_3^{(n)}(z)$

存在适合边界条件

(3.39) $\mathrm{Re}[\overline{\lambda_n(t)}u_t]+\sigma_n(t)u(t)=\tau_n(t)+h_n(t),t\in\Gamma,u(0)=b_0$

的解 $u_n(z)$，而当 $n\to\infty$时，$C^1[u_n(z),\ \bar{D}]=H_n\to\infty$，不妨设 $H_n\geqslant 1$. 令 $v_n(z)=u_n(z)/H_n$，易知它是方程

(3.40) $\begin{cases} v_{z\bar{z}} - \mathrm{Re}[A_1^{(n)}(z)v_z] = A^{(n)}(z), \\ A^{(n)}(z) = A_2^{(n)}(z)v_n(z) + A_3^{(n)}(z)/H_n \end{cases}$

适合边界条件

(3.41) $\begin{cases} \mathrm{Re}[\overline{\lambda_n(t)}v_t] = r_n(t),\ t\in\Gamma,\ v_n(0) = b_0/H_n, \\ r_n(t) = -\sigma_n(t)v_n(t) + [\tau_n(t) + h_n(t)]/H_n \end{cases}$

之问题 O 的解．由于 $C^1[v_n(z),\bar{D}]\leqslant 1$，可知

(3.42) $L_p[A^{(n)}(z),\bar{D}]\leqslant k_1 = 2k,\ C_\alpha[r_n(t),\Gamma]\leqslant l_1,$

这里 $l_1 = l_1(\alpha, l, \Gamma)$．注意到 $w_n(z) = V_{nz}$ 是一阶复方程

(3.43) $w_{\bar{z}} - \mathrm{Re}[A_1^{(n)}(z)w] = A^{(n)}(z)$

适合边界条件

(3.44) $\mathrm{Re}[\overline{\lambda_n(t)}\,w(t)] = r_n(t),\ t\in\Gamma$

之 Riemann-Hilbert 问题 B 的解，其标数 $k = N-1$，根据第三章定理 5.1，便知 $w_n(z)$ 满足估计式

(3.45) $C_\beta[w_n(z),\ \bar{D}]\leqslant M_{12},\ L_p[w_{n\bar{z}},\bar{D}]\leqslant M_{13},$

其中 $M_j = M_j(p,k,\alpha,l,D)$，$j = 12,\ 13$．于是

(3.46) $v_n(z) = 2\mathrm{Re}\int_0^z w_n(z)dz + b_0/H_n$

满足估计式

(3.47) $C_\beta^1[v_n(z),\bar{D}]\leqslant M_{14},\ L_p[v_{nz\bar{z}},\bar{D}]\leqslant M_{15},$

此处 $M_j = M_j(p,k,\alpha,l,D)$，$j = 14, 15$，因此，可从 $\{v_n(z)\}$、$\{w_n(z)\}$ 选取子序列不妨设原序列在 $\bar{D}$ 上分别一致收敛到函数 $v_0(z)$，$w_0(z) = v_{0z}$，而 $v_0(z)$ 满足边界条件

(3.48) $\mathrm{Re}[\overline{\lambda_0(t)}v_{0t}] + \sigma_0(t)v_0(t) = h_0(t), t\in\Gamma,\ v_0(0) = 0,$

我们还要证明 $v_0(z)$ 是二阶齐次方程

(3.49) $v_{0z\bar{z}} - \mathrm{Re}[A_1^{(0)}(z)v_{0z}] - A_2^{(0)}(z)v_0 = 0$

于区域 D 上的解．事实上，从(3.43)式，并根据广义微商的定义，对于任意的 $\varphi(z)\in D_0^1(D)$，有

$$\iint_D \{w_n(z)\varphi_{\bar z} + [\mathrm{Re}(A_1^{(n)}(z)w_n) + A^{(n)}(z)]\varphi(z)\}d\sigma_z = 0,$$

当 $n\to\infty$，得到

$$\iint_D \{w_0(z)\varphi_{\bar z} + [\mathrm{Re}(A_1^{(0)}(z)w_0) + A_1^{(0)}(z)]\varphi(z)\}d\sigma_z = 0,$$

其中 $A^{(0)}(z) = A_2^{(0)}(z)v_0 + A_3^{(0)}(z)$，故

$$w_{0\bar z} = \mathrm{Re}[A_1^{(0)}(z)w_0] + A^{(0)}(z),$$

这表明 $v_0(z) = 2\mathrm{Re}\int_0^z w_0(z)dz$ 是方程(3.49)于 D 上的解. 根据定理3.4关于问题 O 解的唯一性，知 $v_0(z)\equiv 0$, $z\in D$. 但从 $C^1[v_n(z),\bar D]=1$ 可推出：存在点 $z_*\in D$，使得 $v_0(z_*)\neq 0$. 此矛盾证明了(3.37)式成立.

再使用导出(3.47)式的方法，可证 $u(z)$ 满足估计式(3.36).

为了证明二阶方程(1.1)问题 O 解的存在性，我们还要给出两个引理.

引理 3.1 设 k_2 是一非负常数，如果将条件 C_* 中的 $L_p[A_3(z),\bar D]\le k$ 与(3.33)式中的 $C_\alpha[\tau(t),\Gamma]\le l$, $|b_0|\le l$ 分别代以

(3.50) $\quad L_p[A_3(z),\bar D]\le k_2,\ \ C_\alpha[\tau(t),\Gamma]\le k_2,\ \ |b_0|\le k_2,$

则方程(1.1)之问题 O 的解 $u(z)$ 满足估计式

(3.51) $\quad C_\beta^1[u(z),\bar D]\le M_{16}k_2,\ \ L_p[u_{z\bar z},\bar D]\le M_{17}k_2,$

其中 β 如(3.36)中所述，$M_j=M_j(p,k,\alpha,l,D)$, $j=16,17$.

证 当 $k_2=0$ 时，从定理3.4即知(3.51)式成立. 今考虑 $k_2>0$，记 $v(z)=u(z)/k_2$，则函数 $v(z)$ 是方程

(3.52) $\quad v_{z\bar z} - \mathrm{Re}[A_1(z)v_z] - A_2(z)v = A_3(z)/k_2$

适合边界条件

(3.53) $\quad \mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}v_t] + \sigma(t)v = [\tau(t)+h(t)]/k_2,$

$\qquad t\in\Gamma,\ \ v(0)=b_0/k_2,$

之问题 O 的解，其中

(3.54) $L_p[A_3(z)/k_2,\bar{D}]\leqslant 1$，$C_\alpha[\tau(t)/k_2,\Gamma]\leqslant 1$，$|b_0/k_2|\leqslant 1$.

根据定理 3.5，可知 $v(z)$ 满足估计式

(3.55) $C_\beta^1[v(z),\bar{D}]\leqslant M_{16}$，$L_p[v_{z\bar{z}},\bar{D}]\leqslant M_{17}$，

其中 M_{16}，M_{17} 如(3.51)中所述。由上式即知，$u(z)=k_2 v(z)$ 满足估计式(3.51)。

引理 3.2 设方程(1.1)满足条件 C_*，又其中的 $A_2(z)=0$，$z\in D$ 及(3.32)中的 $\sigma(t)=0$，$t\in\Gamma$，则方程

(3.56) $u_{z\bar{z}}-\mathrm{Re}[A_1(z)u_z]=A_3(z)$

适合边界条件

(3.57) $\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}u_t]=\tau(t)+h(t)$，$t\in\Gamma$，$u(0)=b_0$

之问题 O 存在唯一解 $u(z)$。

证 关于上述问题 O 解的唯一性由定理 3.4 得知。为了证明问题 O 解的存在性，我们先考虑一阶复方程

(3.58) $w_{\bar{z}}-\mathrm{Re}[A_1(z)w]=A_3(z)$

适合如下边界条件与点型条件之 Riemann-Hilbert 问题 B.

(3.59) $\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)]=\tau(t)+h(t)$，$t\in\Gamma$，

(3.60) $\mathrm{Im}[\overline{\lambda(a_j)}w(a_j)]=b_j$，$a_j\in\Gamma_j$，$j=1,\cdots,N$，

其中 $b_j(j=1,\cdots,N)$ 都是实常数。仿照第三章定理 5.2、定理 5.3，可证上述问题 B 存在唯一解 $w_0(z)$，如果

(3.61) $\mathrm{Re}\int_{\Gamma_j}w_0(z)dz=0$，$j=1,\cdots,N$，

那么函数

(3.62) $u(z)=2\mathrm{Re}\int_0^z w_0(z)dz+b_0$

便是方程(3.56)之前述问题 O 的解。否则，我们求出齐次问题 $B_0(A_3(z)=0$，$\tau(t)=0)$ 适合点型条件

$$(3.63)\quad \operatorname{Im}[\overline{\lambda(a_j)}w_k(a_j)] = \delta_{jk} = \begin{cases}1, & j=k,\\ 0, & j\neq k,\end{cases} \quad j,k=1,\cdots,N$$

的 N 个线性无关解 $w_1(z),\cdots,w_N(z)$，并可证行列式

$$(3.64)\quad J = \begin{vmatrix} I_{1,1}\cdots I_{1,N} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ I_{N,1}\cdots I_{N,N}\end{vmatrix} \neq 0,\quad I_{j,k} = \operatorname{Re}\int_{\Gamma_j} w_k(z)dz.$$

假如不然，存在不会为 0 的实常数 $C_1,\cdots,C_N$，使得函数

$w(z) = \sum_{k=1}^{N} c_k w_k(z)$ 满足

$$(3.65)\quad \operatorname{Re}\int_{\Gamma_j} w\ (z)\ dz = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{N} c_k \int_{\Gamma j} w_k(z)\ dz = \sum_{k=1}^{N} c_k I_{jk} = 0,$$

$$j=1,\cdots,N.$$

因而在 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_N$ 上分别存在点 $a_1^*,\cdots,\ a_N^*$，使得

$$(3.66)\quad \operatorname{Re}[i(z-z_j)w(z)]|_{z=a_j^*} = -\operatorname{Im}[(a_j^*-z_j)w(a_j^*)] = 0,$$

$$j=1,\cdots,\ N,$$

另外，由 $\operatorname{Re}\left[\dfrac{\overline{\lambda(z)}}{z-z_j}\right] = -r_j\cos(\nu,n)\neq 0,\ z\in\Gamma_j, j=1,\cdots,N$(见[128]23)第六章 §4，有

$$(3.67)\quad \operatorname{Re}\left[\frac{\overline{\lambda(z)}}{z-z_j}(z-z_j)w(z)\right] = 0,\quad z\in\Gamma_j, j=1,\cdots,\ N,$$

并注意到

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\overline{\lambda(z)}}{z-z_j}(z-z_j)w\ (z)\ \right]\Bigg|_{z=a_j^*} = \operatorname{Re}\left[\frac{\overline{\lambda(a_j^*)}}{a_j^*-z_j}\right]\operatorname{Re}$$

$$[a_j^*-z_j]w(a_j^*) - \operatorname{Im}\left[\frac{\overline{\lambda(a_j^*)}}{a_j^*-z_j}\right]\operatorname{Im}[(a_j^*-z_j)\ w(a_j^*) = 0,$$

$$j=1,\cdots,N,$$

故有

(3.68) $\operatorname{Re}[(a_j^* - z_j)w(a_j^*)] = 0,\ j = 1, \cdots, N.$

于是$(a_j^* - z_j)w(a_j^*) = 0$，而 $w(a_j^*) = 0,\ j = 1, \cdots, N$。这表明 $w(z)$ 在 Γ 上有不少于 $2N$ 个零点，由于 $\lambda(t)$的标数为 $k = N-1$，根据第三章定理 1.1 及书[128]23)第五章(2.7)式，有

(3.69) $2N \leqslant 2N_D + N_\Gamma \leqslant 2k = 2N-2,$

此矛盾证明了(3.64)式中的 $J \neq 0$。

这样一来，就可由代数方程组

$$(3.70)\quad \begin{cases} C_1 I_{11} + \cdots + C_N I_{1N} = -\operatorname{Re}\int_{\Gamma_1} w_0(z)dz, \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ C_1 I_{N1} + \cdots + C_N I_{NN} = -\operatorname{Re}\int_{\Gamma_N} w_0(z)dz \end{cases}$$

求得唯一解 $C_1, \cdots, C_N$，而函数

$$(3.71)\quad w(z) = w_0(z) + \sum_{k=1}^{N} c_k w_k(z)$$

满足边界条件(3.59)与

$$(3.72)\quad \operatorname{Re}\int_{\Gamma_j} w(z)dz = 0,\ j = 1, \cdots, N.$$

将(3.71)中的 $w(z)$代入(3.62)中 $w_0(z)$的位置，所得的函数 $u(z)$ 便是方程(3.56)适合边界条件(3.57)之问题 O 的解。

最后使用参数开拓法证明方程(1.1)之问题 O 的可解性。

定理 3.6 设二阶方程(1.1)满足条件 C_*，则其问题 O 是可解的。

证 相仿于定理 3.4 的证明，使用推论 3.1 中所述的函数 $\psi(z)$、$\Psi(z)$，可将求解定理中所述问题 O 的解 $u(z)$转化为求解形如(3.34)的方程适合边界条件

(3.73) $\operatorname{Re}[\overline{\lambda(t)}U_t] + \left[\sigma(t) + \dfrac{\partial \Psi}{\partial \nu}\right]U = \tau(t) + h(t),\ t \in \Gamma,\ U(0)$

$$= B_0 = \frac{b_0 - \psi(0)}{\Psi(0)}$$

之问题O 的解 $U(z) = [u(z) - \psi(z)]/\Psi(z)$. 正如 (3.35)式中所述， $\sigma(t) + \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \geqslant 0$, $t \in \Gamma$. 不失一般性，我们不妨只证明方程

(3.74)　$u_{z\bar{z}} - \mathrm{Re}[A_1(z) u_z] = 0$

适合边界条件

(3.75)　$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)} u_t] + \sigma(t) u = \tau(t) + h(t)$, $t \in \Gamma$, $u(0) = b_0$

之问题O 的可解性. 为了使用参数开拓法，将边界条件(3.75)改写成

(3.76)　$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)} u_t] + \varepsilon \sigma(t) u = r(t) + h(t)$, $t \in \Gamma$, $u(0) = b_0$,

这里 $\varepsilon (0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1)$ 是参数，$r(t) \in C_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, 并把此边值问题记作问题 O_*.

当 $\varepsilon = 0$, 由引理 3.2, 知此问题 O_* 存在唯一解. 如果对 $\varepsilon = \varepsilon_0 (0 \leqslant \varepsilon_0 < 1)$, 此问题$O_*$ 对于任意的函数 $r(t) \in C_\alpha(\Gamma)$ 可解，那么将证明存在足够小的正数 δ, 对于满足条件 $|\varepsilon - \varepsilon_0| \leqslant \delta$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ 的所有参数 ε, 问题 O_* 均可解. 将边界条件(3.76)改写成

(3.77)　$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)} u_t] + \varepsilon_0 \sigma(t) u = (\varepsilon_0 - \varepsilon) \sigma(t) u + r(t) + h(t)$,
　　$u(0) = b_0$.

把 $u_0(z) = b_0$ 代入(3.77)式等号右边 u 的位置，可求得方程(3.74)适合边界条件(3.77)之问题 O_* 的解 $u_1(z)$, 由定理 3.5, 知 $u_1(z) \in C^1_\beta(\bar{D})$. 又将 $u_1(z)$ 代入(3.77)式右边 u 的位置，再求(3.74)适合边界条件(3.77)之问题 O_* 的解 $u_2(z)$. 依次类推，可求得方程(3.74)的解序列$\{u_n(z)\}$, 满足边界条件

(3.78)　$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)} u_{n+1t}] + \varepsilon_0 \sigma(t) u_{n+1} = (\varepsilon_0 - \varepsilon) \sigma(t) u_n + r(t)$
　　$+ h(t), u_n(0) = b_0$.

而函数$u_{n+1}(t)-u_n(t)$仍是方程(3.74)的解，且满足边界条件

$$(3.79)\quad \begin{cases}\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}(u_{n+1}-u_n)]+\varepsilon_0\sigma(t)(u_{n+1}-u_n)=(\varepsilon_0-\varepsilon)\sigma(t)\\ (u_{n+1}-u_n)+h(t),\ t\in\Gamma,\ u_{n+1}(0)-u_n(0)=0.\end{cases}$$

注意到

$$C_\alpha[(\varepsilon_0-\varepsilon)\sigma(t)(u_n-u_{n-1}),\Gamma]\leqslant|\varepsilon_0-\varepsilon|lC_\beta^1[u_n-u_{n-1},\bar{D}],$$

由引理3.1，便得

$$C_\beta^1[u_{n+1}-u_n,\bar{D}]\leqslant|\varepsilon_0-\varepsilon|lM_{16}C_\beta^1[u_n-u_{n-1},\bar{D}].$$

选取$\delta=1/[2(lM_{16}+1)]$，则当$|\varepsilon_0-\varepsilon|\leqslant\delta$，就有

$$(3.80)\quad C_\beta^1[u_{n+1}-u_n,\bar{D}]\leqslant\frac{1}{2}C_\beta^1[u_n-u_{n-1},\bar{D}].$$

又当$n,m\geqslant N>0$，有$C_\beta^1[u_{n+1}-u_n,\ \bar{D}]\leqslant\frac{1}{2^N}C_\beta^1[u_1-u_0,\ \bar{D}]$，

$$C_\beta^1[u_n-u_m,\ \bar{D}]\leqslant\frac{1}{2^N}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}C_\beta^1[u_1-u_0,\bar{D}]\leqslant\frac{1}{2^N}C_\beta^1[u_1-u_0,\ \bar{D}],$$

因此，当n、$m\to\infty$时，$C_\beta^1[u_n-u_m,\ \bar{D}]\to0$。由$C_\beta^1(\bar{D})$空间的完备性，可知存在$u_*(z)\in C_\beta^1(\bar{D})$，使得当$n\to\infty$时，$C_\beta^1[u_n-u_*,\ \bar{D}]\to0$，而$u_*(z)$就是当$|\varepsilon_0-\varepsilon|\leqslant\delta$时(3.74)适合边界条件(3.76)之问题$O_*$的解。这样便知，当$\varepsilon=0,\ \delta,\cdots,\left[\frac{1}{\delta}\right]\delta,\ 1$时问题$O^*$可解。特别当$\varepsilon=1$，$r(t)=\tau(t)$时即问题$O$可解。

§4 二阶方程的非正则斜微商边值问题

本节将讨论二阶方程（1.1）的一种非正则斜微商边值问题，这种边值问题的边界条件中$\frac{\partial}{\partial\nu}$的$\vec{\nu}$允许指向区域$D$外、$D$内，

也可与边界Γ相切，即允许$\cos(\nu, n)>0$, $\cos(\nu, n)<0$，也可以使$\cos(\nu, n)=0$。

一、非正则斜微商问题的提法与解的性质

问题M 求二阶方程（1.1）（满足条件C_*）在$N+1$连通圆界闭区域$\bar{D}$上的连续可微解$u(z)$，使它满足边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+2\sigma(t)u(t)=z[\tau(t)-\sigma(t)h(t)],\ t\in\Gamma. \tag{4.1}$$

这里$\frac{\partial}{\partial \nu}$是沿$D$的边界$\Gamma$上$\vec{\nu}$方向的方向微商，$\vec{\nu}$可以指向$D$外、$D$内，也可与$\Gamma$相切，类似于(3.31)，可将边界条件(4.1)写成复形式

$$\operatorname{Re}[\overline{\lambda(t)}u_t]+\sigma(t)[u(t)+h(t)]=\tau(t),\ t\in\Gamma, \tag{4.2}$$

其中$\overline{\lambda(t)}=\cos\beta+i\sin\beta=e^{i\beta(t)}$，$\beta(t)$是点$t\in\Gamma$的$x$轴方向与$\vec{\nu}$的交角，并设$\lambda(t)$、$\sigma(t)$、$\tau(t)$满足条件

$$C_\alpha[\lambda(t),\ \Gamma]\leqslant l,\ C_\alpha[\sigma(t),\ \Gamma]\leqslant l,\ C_\alpha[\tau(t),\ \Gamma]\leqslant l, \tag{4.3}$$

$$\sigma(t)\cos(\nu,\ n)\geqslant 0,\ t\in\Gamma, \tag{4.4}$$

此处，$\alpha(0<\alpha<1)$，$l(0\leqslant l<\infty)$都是常数，$\vec{n}$为Γ的外法线向量。下面对条件(4.4)作进一步说明，以Γ^+、Γ^-分别表示Γ上使$\cos(\nu, n)\geqslant 0$，$\cos(\nu, n)\leqslant 0$的一些圆弧，不妨设每条圆弧包含起点，但不含终点，且$\Gamma^+\cup\Gamma^-=\Gamma$，$\Gamma^+\cap\Gamma^-=\phi$，又$\overline{\Gamma^+}\cap\overline{\Gamma^-}$由有限个点组成，其中满足下列条件的所有点记作$a_j(j=1,\cdots,m)$，$a_j'(j=1,\cdots,m')$，即以这些点的每一个为端点的两条位于$\Gamma^+$、$\Gamma^-$上的圆弧中都至少有一点，分别使$\cos(\nu, n)>0$，$\cos(\nu, n)<0$成立，而当$a_j$、$a_j'$处的$\vec{\nu}$与$\Gamma$的正方向相同时，$a_j\in\Gamma^+$，$a_j'\in\Gamma^-$；当$a_j$，$a_j'$处的$\vec{\nu}$与$\Gamma$的正方向相反时，$a_j\in\Gamma^-$，$a_j'\in\Gamma^+$，且$\sigma(a_j')=0$，$j=1,\cdots,m'$。而(4.1)、(4.2)式中的$h(t)$为

$$(4.5)\qquad h(t)=\begin{cases}0, & t\in\Gamma,\ m\geqslant 1,\\ h_0, & t\in\Gamma_0\\ 0, & t\in\Gamma-\Gamma_0\end{cases}\Bigg\}m=0,$$

其中 h_0 为待定实常数. 我们还可要求方程 (1.1) 适合边界条件 (4.2) 的解 $u(z)$ 满足点型条件

$$(4.6)\qquad u(a_j)=b_j,\ j=1,\ \cdots,\ J,\quad J=\begin{cases}m, & 当 m\geqslant 1,\\ 1, & 当\ m=0,\end{cases}$$

其中 b_j 是实常数, 且 $|b_j|\leqslant l$, $j=1,\cdots,m$, 不妨设 $b_1=0$. 如果在整个边界分支 Γ_j 上, $\cos(\nu,\ n)=0$, $\sigma(t)=0$, $1\leqslant j\leqslant N+1$, 此时设

$$(4.7)\qquad \int_{\Gamma_j}\tau(t)d\theta=0, u(a_j^*)=b_j^*,\ a_j^*(\neq a_k')\in\Gamma_j.$$

不妨设在 $\Gamma_j(j=1,\cdots,\ N_0,\ 1\leqslant N_0\leqslant N+1)$ 具有上述性质, 而在 $\Gamma_j(N_0+1\leqslant j\leqslant N+1)$ 上不具有这种性质. 在(4.7)式中, $b_j^*(j=1,\cdots,N_0)$都是常数, $|b_j^*|\leqslant l$.

我们还把求方程 (1.1) 在 $D_*=\bar{D}-\{a_1',\cdots,a_m'\}$ 上连续可微、在 D 内有界且满足边界条件与点型条件(4.2)—(4.7)的解记作**问题 M_***. 而问题 M、问题 M_* 的标数

$$(4.8)\qquad k=N-1+(m+m')/2.$$

容易看出, 假如在整个边界 Γ 上, ν 与 Γ 相切且 $\sigma(t)=0$, 则问题 M 就是第一边值问题 D. 若 $\cos(\nu,\ n)>0$, $\sigma(t)\geqslant 0$, $t\in\Gamma$, 则问题 M 就是第三边值问题 O.

定理 4.1 设二阶方程 (1.1) 满足条件 C_*, 则其问题 M_* 的解是唯一的.

证 以 $u_1(z)$、$u_2(z)$表示方程 (1.1) 之问题 M_* 的两个解, 则函数 $u(z)=u_1(z)-u_2(z)$是齐次方程(1.26)适合边界条件

$$(4.9)\qquad \frac{\partial u}{\partial\nu}+2\sigma(t)[u(t)+h(t)]=0,\ t\in\Gamma$$

(4.10) $u(a_j)=0, j=1,\cdots,J, \int_{\Gamma_j}\tau(t)d\theta=0,\ u(a_j^*)=0,$
$j=1,\cdots,N_0$

的解。如定理 3.4 那样，不妨只讨论方程(3.34)或(3.74)。下面要证 $u(z)\equiv 0$，当 $z\in D$。假如不然，则由推论1.2可知有 $M=\sup\limits_{z\in D^*}u(z)>0$，或 $m=\inf\limits_{z\in D^*}u(z)<0$。若前者成立，且有点 $t_*\in\Gamma_j(1\leqslant j\leqslant N_0)$，使 $M=u(t_*)>0$，由于 $\cos(\nu,\ n)=0$，$\sigma(t)=0$，当 $t\in\Gamma_j$，故 $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0$，当 $t\in\Gamma_j$，$u(a_j^*)=0$，这可推知 $u(t)=0$，当 $t\in\Gamma_j$，这与 $M=u(t_*)>0$ 矛盾，故不可能有点 $t_*\in\Gamma_j$ $(1\leqslant j\leqslant N_0)$。如果有点 t_* $(\neq a_k')$ $\in\Gamma_j(N_0<j\leqslant N)$，使 $M=u(t_*)>0$，易知 $t_*\neq a_k$，因为 $u(a_k)=0$，对于此点 t_*，有 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{t=t_*}\geqslant 0$，当 $\cos(\nu,\ n)\geqslant 0$，而 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{t=t_*}\leqslant 0$，当 $\cos(\nu,\ n)<0$，故 $u(t_*)=0$。否则与(4.9)式矛盾，由定理1.3与推论1.3可推知，当 $t=t_*$，$\cos(\nu,\ n)=0$。以 $\tilde{\Gamma}$ 表示 Γ 上包含点 t_* 最长的一段圆弧（也可能是一点），使 $\cos(\nu,\ n)=0$，且 $\sigma(t)=0$，由于 $M>0$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0$，$u(t)=M$，当 $t\in\tilde{\Gamma}$。易知 $\tilde{\Gamma}$ 的端点不包含 a_j，否则 $u(a_j)=0$，这与 $M>0$ 矛盾，若 $\tilde{\Gamma}$ 的端点不包含 a_j'，则在 $\tilde{\Gamma}$ 的一端点附近，必有点 $t_{**}\in\Gamma-\tilde{\Gamma}$，在此点，有两种情况之一出现：①若 $\cos(\nu,\ n)>0$，则 $\cos(\nu,\ n)$、$\cos(\nu,\ s)$、$\dfrac{\partial u}{\partial n}$、$\dfrac{\partial u}{\partial s}$（$s$ 为 Γ 的切线方向）中的前三者为正，第四个为负，这是 $u(t)$ 在极大点附近的特性，故

(4.11) $$\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{t=t_{**}}=\left[\frac{\partial u}{\partial n}\cos(\nu,n)+\frac{\partial u}{\partial s}\cos(s,n)\right]\Bigg|_{t=t_{**}}>0,$$

若 $\cos(\nu,\ n)<0$，则可类似地推出 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{t=t_*}<0$，这与(4.9)式

矛盾。或②$\cos(\nu,n)=0$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{t=t_{**}}\geqslant 0$（或$\leqslant 0$），而$\sigma(t_{**})>0$（或$<0$），这也与(4.9)矛盾。如果$\tilde{\Gamma}$的一端点是$a'_i$，或更一般的情形，即$M=\sup\limits_{z\in D_*}u(z)=u(a'_i)$或$u(a'_i\pm 0)$，如果在$\Gamma^+$或$\Gamma^-$上存在一圆弧（不是一点），相应以$a'_i$或$a'_i\pm 0$为端点，使$\cos(\nu,n)=0$，那么可用前面的方法证明这是不可能的。否则，由于$\sigma(a'_j)=0$，可证在$\bar{D}$上$a'_j$的一邻域$D(a'_j)$内，有

(4.12)　$u(z)=c_j\arg(z-a'_j)+\tilde{u}(z)$，$1\leqslant j\leqslant m'$，

这里c_j是实数，也可能等于0，$\tilde{u}(z)$是$D(a'_j)$上的Hölder连续函数，所以在a'_j附近有点t_{**}，相应的$\cos(\nu,n)>0$（或<0），当$c_j=0$，则$u(z)$在$D(a'_j)$连续可微，易知在此点，(4.11)式成立，或$\left.\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{t=t_{**}}<0$，这与(4.9)式矛盾。当$c_j\neq 0$，则在点$t_{**}$，有$\dfrac{\partial u}{\partial n}>0$（或$<0$），因而也可推出$\dfrac{\partial u}{\partial\nu}>0$（或$<0$），故$u(z)$不能在$\Gamma_j(N_0<j\leqslant N)$上取到上确界。因此$u(z)$在$\bar{D}$上的上确界$M$、下确界$m$只能在$\Gamma_0$上取到。对于$m\geqslant 1$，则有$h(t)=h_0=0$，当$t\in\Gamma_0$；对$m=0$，可证$h_0=0$，当$t\in\Gamma_0$。事实上，由于$M=\sup\limits_{z\in D_*}u(z)>0$，或$m=\inf\limits_{z\in D_*}u(z)<0$。假如$h_0>0$，则$M+h_0=\sup\limits_{z\in D_*}U(z)>0$，这里$U(z)=u(z)+h_0$，由于$\dfrac{\partial U}{\partial\nu}+\sigma(t)U(t)=0$，$t\in\Gamma_0$，这样进行与前面那样的讨论，可推出矛盾，故$h_0\leqslant 0$。同理也可推出$h_0\geqslant 0$，故$h_0=0$。然后又与前面那样可证$u(z)\equiv 0$，即$u_1(z)\equiv u_2(z)$，当$z\in D$。

现在使用定理4.1证明方程(1.1)之问题M_*的解$u(z)$所满足的估计式。

定理 4.2 在定理 4.1 的条件下，则方程(1.1)之问题 M_* 的解$u(z)$满足估计式

$$(4.13)\quad C_\beta[w(z),\ \bar{D}]\leqslant M_1,$$

$$C[u(z),\ D_*]+C_\beta[\sigma(t)u(t),\ \Gamma]\leqslant M_2,$$

这里 $\beta=\min\ (\alpha,\ 1-2/p)$，$w(z)=\Pi(z)u_z=\prod_{j=1}^{m'}\left(\frac{z-a_j'}{z-z_j'}\right)u_z$,

当 $a_j'\in\Gamma_0$，$1<|z_j'|<\infty$，而当 $a_j'\in\Gamma_j, z_j'=z_j$，$1\leqslant j\leqslant N$，又 $M_j=M_j(p,\ k,\ \alpha,\ l,\ \bar{D})$，$j=1,\ 2$.

证 如定理 3.6 的证明，先使用推论 3.1 中的函数 $\psi(z)$、$\Psi(z)$，将方程(1.1)之问题 M_* 的解 $u(z)$转化为方程(3.34)，即

$$(4.14)\quad U_{z\bar{z}}-\mathrm{Re}[A(z)U_z]=0,\ A(z)=-(\ln\Psi)_{\bar{z}}+A_1(z)$$

适合如下边界条件

$$(4.15)\quad \frac{\partial U}{\partial \nu}+2\sigma^*(t)[U(t)+h(t)]=2\tau^*(t),\ \ t\in\Gamma,$$

$$(4.16)\quad U(a_j)=b_j,\ j=1,\cdots,\ J,\ \int_J \tau^*(t)\,dt=0,\ U(a_j^*)=a_j^*,$$

$$j=1,\cdots,\ N_0$$

之问题 M_* 的解

$$(4.17)\quad U(z)=[u(z)-\psi(z)]/\Psi(z).$$

在(4.15) 式中，$\sigma^*(t)=\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}+\sigma(t)$，$\tau^*(t)=\tau(t)-\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$,

$t\in\Gamma$. 容易看出，方程(4.14) 仍满足类似的条件 C_*，只是将条件 (1.2) 中的常数 k 换以另一个常数，又 $\sigma^*(t)$、$\tau^*(t)$ 在 Γ 上仍满足类似于 $\sigma(t)$、$\tau(t)$的条件，并且有 $\sigma^*(t)\cos(\nu,\ n)\geqslant 0$，$t\in\Gamma$. 由于 $\psi(z)$、$\Psi(z)$ 所满足的估计式（见推论3.1)及 $u(z)$在点 $a_j'(j=1,\cdots,\ m')$ 附近的性质，可推知 U_z 在 $a_j'(j=1,\cdots,\ m')$ 有不超过一级极点，又因边界条件 (4.15) 可写成复形式

(4.18) $\operatorname{Re}[\overline{\lambda(t)}U_t]+\sigma^*(t)[U(t)+h(t)]=\tau^*(t),\ t\in\Gamma$.

令 $W(z)=\Pi(z)U_z$，则 $W(z)$ 满足边界条件

(4.19) $\operatorname{Re}[\overline{\Lambda(t)}W(t)]+\sigma^*(t)|\Pi(t)|[U(t)+h(t)]$

$=|\Pi(t)|\tau^*(t),\ t\in\Gamma$,

这里 $\overline{\Lambda(t)}=\overline{\lambda(t)}|\Pi(t)|/\Pi(t)$，而 $\Lambda(t)$ 的标数为 $N-1+\dfrac{m}{2}$。

并知 $\sigma^*(t)|\Pi(t)U(t)$、$|\Pi(t)|\tau^*(t)\in C_\beta(\Gamma)$。我们先证

(4.20) $C[W(z),\ \bar{D}]\leqslant M_3=M_3(p,k,\alpha,l,D)$。

假如不然，类似于定理 3.5 的证明，有相应的边值问题 M_* 的解 $u_n(z)$，$W_n(z)=\Pi(z)U_{nz}=\Pi(z)\{[u_n(z)-\psi_n(z)]/\Psi_n(z)\}_z$，使 $C[W_n(z),\ \bar{D}]=H_n\to\infty$，不妨设 $H_n\geqslant 1$，记 $W_n^*(z)=W_n(z)/H_n$ $=\Pi(z)U_{nz}/H_n$ 而 $U_n^*(z)=U_n(z)/H_n$ 是方程

$$
(4.21)\quad \begin{cases} U^*_{nz\bar z}-\operatorname{Re}[A^{(n)}(z)U^*_{nz}]=0, \\ \qquad A^{(n)}(z)=-2(\ln\Psi)_{\bar z}+A_1^{(n)}(z), \\ W^*_{n\bar z}-\Pi(z)\operatorname{Re}[A^{(n)}(z)/\Pi(z)W_n^*]=0 \end{cases}
$$

适合如下边界条件之问题 M_* 的解。

$$
(4.22)\quad \begin{cases} \operatorname{Re}[\lambda_n(t)U^*_{nt}]+\sigma_n^*(t)[U_n^*(t)+h_n(t)=\tau_n^*(t)/H_n, \\ \quad t\in\Gamma, \\ \text{即 } \operatorname{Re}[\overline{\Lambda_n(t)}W_n^*(t)]+\sigma_n^*(t)|\Pi(t)|[U_n^*(t)+h_n(t)] \\ \quad =|\Pi(t)|\tau_n^*(t)/H_n,\ t\in\Gamma, \end{cases}
$$

(4.23) $U_n^*(a_j)=b_j/H_n,\ j=1,\cdots,\ J,\ \int_{\Gamma_j}\tau_n^*(t)\,d\theta=0,$

$U_n^*(a_j^*)=b_j^*/H_n,\ j=1,\cdots,\ N_0$.

使用文[128]33) 的证法，可知 $W_n^*(z)$、$U_n^*(z)$ 满足估计式

(4.24) $C_\beta[W_n^*(z),\ \bar{D}]\leqslant M_4$,

$C[U_n^*(z),D_*]+C_\beta[\sigma^*(t)U_n^*(t),\Gamma]\leqslant M_5$,

其中 $M_j=M_j(p,k,\alpha,l,D),\ j=4,5$。因此可从 $\{W_n^*(z)\}$、$\{U_n^*(z)\}$ 选取子序列分别在 $\bar{D}$ 上及 D 内闭一致收敛到 $W_0^*(z)$、$U_0^*(z)$，

正如定理 3.5 中所证，它们是方程

$$(4.25)\quad \begin{cases} W^*_{0\bar{z}} - \Pi(z)\mathrm{Re}[A^{(0)}(z)/\Pi(z)W^*_0] = 0, \\ A^{(0)}(z) \in L_p(\bar{D}) \\ \text{即 } U^*_{0z\bar{z}} - \mathrm{Re}[A^{(0)}(z)U^*_{0z}] = 0 \end{cases}$$

于 D 内的解，且满足边界条件

$$(4.26)\quad \begin{cases} \mathrm{Re}[\overline{\Lambda_0(t)}W^*_0(t)] + \sigma^*_0(t)|\Pi(t)|[U^*_0(t) + h(t)] = 0 \\ \text{即 } \mathrm{Re}[\overline{\lambda_0(t)}U^*_{0t}] + \sigma^*_0(t)[U^*_0(t) + h_0(t) = 0, t \in \Gamma, \end{cases}$$

$$(4.27)\quad U_0(a_j) = 0,\ j = 1, \cdots, J,\ \int_{\Gamma_j} \tau^*_0(t)\,d\theta = 0,\ U_0(a^*_j) = 0,\ j = 1, \cdots,\ N_0.$$

根据定理 4.1，可知 $U^*_0(z) = 0, W^*_0(z) = \Pi(z)\,U^*_{0z} = 0$，当 $z \in D$. 然而从 $C[W^*_0(z),\ \bar{D}] = 1$ 可推出 $|W^*_0(z_*)| = 1, z_*$ 是 $\bar{D}$ 上一点. 这样便证明了（4.20）式，最后仿照导出（4.24）的方法，便可得到方程（1.1）之问题 M_* 的解 $u(z)$ 所满足的估计式 (4.13).

对于（1.1）的问题 M，显然定理 4.1，定理 4.2 都成立.

二、非正则斜微高边值问题的可解性

我们先讨论满足条件 C_* 的方程(3.74)，即

$$(4.28)\quad u_{z\bar{z}} - \mathrm{Re}[A_1(z)u_z] = 0,$$

并把（4.28）适合边界条件

$$(4.29)\quad \mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}u_t] = \tau(t) + \sigma(t)h(t),\quad t \in \Gamma$$

与(4.6)、(4.7)之边值问题 M 记作**问题** M′.

引理 4.1 二阶方程（4.28)之问题 M' 是可解的.

证 先求一阶复方程

$$(4.30)\quad w_{\bar{z}} - \mathrm{Re}[A_1(z)w(z)] = 0$$

适合边界条件

$$(4.31)\quad \mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)] = \tau(t) - \sigma(t)h(t),\quad t \in \Gamma$$

之问题 B' 的解 $w(z)$，允许它在点 $a_j'(j=1,\cdots,m')$ 有不多于一级极点，且要求 $w(z)$ 适合 $2\left(\frac{m}{2}+N-1\right)-N+1=m+N-1$（当 $m\geqslant 1$）或 N（当 $m=0$）个点型条件

(4.32) $\operatorname{Im}[\lambda(a_j^*)w(a_j^*)]=c_j,\ j=1,\cdots,J,$

$$J=\begin{cases}m+N-1, & \text{当}\ m\geqslant 1,\\ N, & \text{当}\ m=0,\end{cases}$$

其中 $a_j^*(\neq a_k')\in\Gamma_j(j=1,\cdots,N)$ 上的点，$a_j^*(j=N+1,\cdots,J)$ 是 Γ_0 上不同的点，$c_j(j=1,\cdots,J)$ 都是实常数. 正如定理 4.2 那样，记 $\Pi(z)=\prod_{j=1}^{m'}\left(\frac{z-a_j'}{z-z_j'}\right)$，并设 $W(z)=\Pi(z)w(z)$，则边界条件(4.31)与点型条件(4.32)分别变为

(4.33) $\operatorname{Re}[\overline{\Lambda(t)}W(t)]=|\Pi(t)|[\tau(t)-\sigma(t)h(t)],\ t\in\Gamma,$

(4.34) $\operatorname{Im}[\overline{\Lambda(a_j^*)}w(a_j^*)]=|\Pi(a_j^*)|c_j,\ j=1,\cdots,J,$

这里 $\overline{\Lambda(t)}=\overline{\lambda(t)}|\Pi(t)|/\Pi(t)$. 易知 $\Lambda(t)$ 的标数为 $N-1+\frac{m}{2}$.

仿第三章定理 5.6，可证方程

(4.35) $W_{\bar z}-\Pi(z)\operatorname{Re}[A_1(z)/\Pi(z)\cdot W]=0$

适合边界条件 (4.33) 与点型条件 (4.34) 之问题 B_* 存在唯一解 $W(z)$，而 $w_0(z)=W(z)/\Pi(z)$ 便是 (4.30) 之问题 B' 的解.

如果此解 $w_0(z)$ 满足条件

(4.36) $\operatorname{Re}\int_{\Gamma_j}w_0(z)dz=0,\ j=1,\cdots,N,$

且函数

(4.37) $u_0(z)=2\operatorname{Re}\int_{a_1}^{z}w_0(z)dz+b_1$

满足条件

(4.38) $u_0(a_j)=b_j,\ j=1,\cdots,J,\ u_0(a_j^*)=b_j^*,\ j=1,\ \cdots,N_0,$

则 $u_0(z)$ 便是定理中所要求问题 M' 的解。如果 (4.36)、(4.38) 中至少有一等式不成立，我们可求出方程(4.30) 适合边界条件与点型条件

(4.39) $\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)]=-\sigma(t)h(t),\ t\in\Gamma,$

(4.40) $\mathrm{Im}[\overline{\lambda(a_j^*)}w(a_j^*)]=\delta_{jk}=\begin{cases}1, & j=k,\\ 0, & j\neq k,\end{cases}\ j,k=1,\cdots,J$

之边值问题的线性无关解 $w_1(z),\ \cdots,\ w_J(z)$。现在要证 $u_k(z)\ =\ 2\mathrm{Re}\int_{a_1}^{z}w_k(z)dz(k=1,\cdots,\ J)$ 满足

$$(4.41)\quad I=\begin{vmatrix} u_1(a_1^*)\cdots u_J(a_1^*)\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ u_1(a_{N_0}^*)\cdots u_J(a_{N_0}^*)\\ I_{N',1}\quad\cdots\ I_{N',J}\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ I_{N,1}\quad\cdots\quad I_{N,J}\\ u_1(a_2)\ \cdots\ u_J(a_2)\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ u_1(a_m)\cdots u_J(a_m)\end{vmatrix}\neq 0,\qquad \begin{array}{l} I_{j,k}=\mathrm{Re}\int_{\Gamma_j}w_k(z)dz,\\ j=N',\cdots,N,N'=N_0+1\\ k=1,\cdots,\ J. \end{array}$$

假如 $I=0$，则有不全为 0 的实常数 $d_k(k=1,\cdots,J)$，可使方程(4.28)在区域 D 内的解

(4.42) $u(z)=\sum_{k=1}^{J}2d_k\mathrm{Re}\int_{a_1}^{z}w_k(z)dz$

适合条件

(4.43) $\mathrm{Re}\int_{\Gamma_j}w(z)\,dz=\mathrm{Re}\int_{\Gamma_j}u_z dz=0,\ j=1,\cdots,N,$

(4.44) $u(a_j)=0,\ j=1,\cdots,J,\ u(a_j^*)=0,\ j=1,\cdots,N_0.$

根据定理 4.1 可知，$u(z)=0,\ w(z)=u_z=0$，当 $z\in D$.

这与 $w(a_j^*)=\sum_{k=1}^{J}d_kw_k(a_j^*)=d_j(j=1,\cdots,J)$不全为0矛盾，故 $I\neq0$。因此，线性代数方程组

$$(4.45)\quad\begin{cases}\sum_{k=1}^{I}d_ku_k(a_j^*)=-u_0(a_j^*)+b_j^*,\ j=1,\cdots,N_0,\\ \sum_{k=1}^{J}d_kI_{jk}=-I_{j0},\ j=N',\ \cdots,\ N,\\ \sum_{k=1}^{J}d_ku_k(a_j)=-u_0(a_j)+b_j,\ j=2,\cdots,m\end{cases}$$

具有唯一解 $d_1,\cdots,d_J$，而函数

$$(4.46)\quad u(z)=2\mathrm{Re}\int_{a_1}^{z}[w_0(z)+\sum_{k=1}^{J}d_kw_k(z)]dz+b_1$$

便是方程（4.28）之问题 M' 的解。

为了证明方程（1.1）之问题 M_* 的可解性，我们还需要以下的引理：

引理 4.2 对于方程(4.28)适合边界条件（4.2）、（4.6）、（4.7)之边值问题 M，如果将(4.3)、（4.6)、(4.7)中关于 $\tau^*(t)$、b_j、b_j^* 的条件改为

$$(4.47)\quad C_\alpha[\tau(t),\ \Gamma]\leqslant l_1,\ |b_j|\leqslant l_1,\ j=1,\ \cdots,\ J,\ |b_j^*|\leqslant l_1,\ j=1,\cdots,N_0,$$

这里 l_1 是非负实数，则方程(4.28)之上述问题 M_* 的解 $u(z)$ 满足估计式

$$(4.48)\quad \begin{aligned}&L_1w=C_\beta[w,\bar{D}]\leqslant M_6l_1,\\ &L_2u=C[u,\ D_*]+C_\beta[\sigma u,\Gamma]\leqslant M_7l_1,\end{aligned}$$

其中 $\beta, w(z)$ 如(4.13)式中所设，$M_j = M_j(p,k,\alpha,l,D)$，$j=6.7$。

证 若 $l_1=0$，由定理 4.1 即知(4.48)式成立。若 $l_1>0$，则函数 $v(z)=u(z)/l_1$ 是方程

$$(4.49)\quad v_{z\bar{z}} - \mathrm{Re}[A_1(z)v_z] = 0$$

适合边界条件

$$(4.50)\quad \mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}U_t] + \sigma(t)[u(t)+h(t)] = \tau(t)/l_1,\ t\in\Gamma,$$

$$(4.51)\quad v(a_j) = b_j/l_1,\ j=1,\cdots,J,\ \int_{\Gamma_j}\tau(t)d\theta = 0,$$

$$v(a_j^*) = b_j^*/l_1,\ j=1,\cdots,N_0$$

之问题 M_* 的解，注意到

$$C_\alpha[\tau(t)/l_1,\ \Gamma]\leqslant 1,\ |b_j/l_1|\leqslant 1,\ j=1,\cdots,J,\ |b_j^*/l_1|\leqslant 1,$$
$$j=1,\cdots,N_0,$$

根据定理 4.2，可得

$$C_\beta[w(z)/l,\bar{D}]\leqslant M_6,$$

$$C[u(z)/l_1,\ D_*] + C_\beta[\sigma(t)u(t)/l,\ \Gamma]\leqslant M_7,$$

从上式便得估计式(4.48)。

定理 4.3 设二阶方程 (1.1) 满足条件 C_*，则其问题 M_* 是可解的。

证 仿照定理 3.2 的证法，使用推论 3.1 中的函数 $\psi(z)$、$\Psi(z)$，将求解方程(1.1)之问题 M_* 的解 $u(z)$ 转化为求解方程 (4.14) 适合边界(4.15)之问题 M_* 的解 $U(z)=[u(z)-\psi(z)]/\Psi(z)$。因此，不妨只证明方程 (3.74) 适合边界条件 (4.2)、(4.6)、(4.7)之问题 M_* 的可解性。我们考虑带有参数 $\varepsilon(0\leqslant\varepsilon\leqslant 1)$ 的边界条件

$$(4.52)\quad \mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}u_t] + \varepsilon\sigma(t)u(t) = r(t) - \sigma(t)h(t),\ t\in\Gamma,$$

其中 $r(t)\in C_\alpha(\Gamma)$。下面求解 (4.14) 适合边界条件 (4.52)、(4.6)、(4.7)之问题 M_* 的解。

当 $\varepsilon=0$，由引理 4.1，知此问题 M_* 可解。如果对 $\varepsilon=\varepsilon_0$

$(0 \leqslant \varepsilon_0 < 1)$，此问题 M_* 对任意的 $r(t) \in C_\alpha(\Gamma)$ 可解，我们将证明，存在与 ε_0 无关的正数 δ，对适合条件 $|\varepsilon - \varepsilon_0| \leqslant \delta$，$0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ 中的所有参数 ε，问题 M_* 均可解．将边界条件(4.52)改写成

$$(4.53)\quad \operatorname{Re}(\overline{\lambda(t)} u_t] + \varepsilon_0 \sigma(t) u(t) = (\varepsilon_0 - \varepsilon)\sigma(t) u(t) + r(t) - \sigma(t) h(t), \quad t \in \Gamma.$$

将引理 4.1 中所求得的解 $u_0(z)$ 代入上式右边 $u(t)$ 的位置，可知(4.28)适合(4.53)、(4.6)、(4.7)之问题 M_* 有解 $u_1(z)$，由定理 4.2 知，$w_1(z) = \Pi(z) u_{1z} \in C_\beta(\bar{D})$，且 $C[u_1(z), D_*] + C_\beta[\sigma(t) u_1(t), \Gamma]$ 有界．仿照定理 3.6 的证法，可得函数序列 $\{u_n(z)\}$ 满足边界条件

$$(4.54)\quad \operatorname{Re}[\overline{\lambda(t)} u_{n+1t}] + \varepsilon_0 \sigma(t) u_{n+1}(t) = (\varepsilon - \varepsilon_0)\sigma(t) u_n(t) + r(t) - \sigma(t) h(t), \quad t \in \Gamma.$$

而函数 $u_{n+1}(z) - u_n(z)$ 仍是 (4.28) 的解，且满足边界条件

$$(4.55)\quad \operatorname{Re}[\overline{\lambda(t)}(u_{n+1} - u_n)] + \varepsilon_0 \sigma(t)(u_{n+1} - u_n) = (\varepsilon - \varepsilon_0)\sigma(t)(u_n - u_{n-1}) - \sigma(t) h(t), \quad t \in \Gamma,$$

$$(4.56)\quad u_{n+1}(a_j) - u_n(a_j) = 0, \quad j = 1, \cdots, J, \qquad u_{n+1}(a_j^*) - u_n(a_j^*) = 0, \quad j = 1, \cdots, N_0.$$

由于 $C_\beta[(\varepsilon_0 - \varepsilon)\sigma(t)(u_n - u_{n-1}), \Gamma] \leqslant |\varepsilon_0 - \varepsilon| L_2(u_n - u_{n-1}) \leqslant |\varepsilon_0 - \varepsilon| [L_1(w_n - w_{n-1}) + L_2(u_n - u_{n-1})]$，

根据引理 4.2 便得

$$L_1(w_{n+1} - w_n) + L_2(u_{n+1} - u_n) \leqslant |\varepsilon_0 - \varepsilon| M_8 [L_1(w_n - w_{n-1}) + L_2(u_n - u_{n-1})],$$

这里 $M_8 = M_6 + M_7 + 1$，选取 $\delta = 1/2M_8$，则当 $|\varepsilon_0 - \varepsilon| \leqslant \delta$ 时，就有

$$L_1(w_{n+1} - w_n) + L_2(u_{n+1} - u_n) < \frac{1}{2}[L_1(w_n - w_{n-1}) + L_2(u_n - u_{n-1})].$$

由 $C_\beta(\bar{D}) \times L_\infty(D_*) \times C_\beta(\Gamma)$ 空间的完备性，则知存在 $u_*(z)$，使

$w_*(z)=\prod(z)u_{*z}\in C_\beta(\bar{D})$，$u_*(z)\in L_\infty(D_*)$，$\sigma(t)u(t)\in C_\beta(\Gamma)$，并且当 $n\to\infty$ 时，$L_1(w_n-w_*)+L_2(u_n-u_*)\to 0$。而 $u^*(z)$ 就是当 $|\varepsilon_0-\varepsilon|\leqslant\delta$ 时(4.28)适合(4.52)、(4.6)、(4.7)之问题 M_* 的解，这样便推知 $\varepsilon=\delta,\cdots,\left[\frac{1}{\delta}\right]\delta$，1 时问题 M_* 可解，特别当 $\varepsilon=1$，

$\Upsilon(t)=\tau(t)$ 时问题 M_* 可解，此解就是方程(4.28)适合(4.2)、(4.6)、(4.7)之问题 M_* 的解。

定理 4.4 在定理 4.3 的条件下，二阶方程(1.1)适合边界条件(4.2)、(4.7)之问题 M 有 m' 个可解条件。

证 设 $u(z)$ 是方程(1.1)之问题 M_* 的解，如果 u_z 在点 a_j ($j=1,\cdots,m'$) 都不是极点，则 $u(z)$ 在闭区域 $\bar{D}$ 上连续，即形如(4.12)式中的 m' 个常数 $c_j(j=1,\cdots,m')$ 都等于 0，则此解 $u(z)$ 也是问题 M 的解。当这 m' 个条件成立时，

(1) 当 $m\geqslant 1$ 时，问题 M 的通解 $u(z)$ 包含有 m 个任意实常数，这可从(4.6)式推出；

(2) 当 $m=0$ 时，问题 M 的通解 $u(z)$ 包含有 1 个任意实常数。

本节的内容可参看文[128]33)。

§5　二阶方程的 Poincaré 边值问题

我们先讨论一种特殊的 Poincaré 边值问题。

一、二阶方程一种特殊的 Poincaré 边值问题

问题 P_1 求方程(3.56)于 $N+1$ 连通圆界闭区域 $\bar{D}$ 上的连续可微解 $u(z)$，使它满足边界条件

(5.1) $\frac{\partial u}{\partial \nu}=2\tau(t)+2h(t),\ t\in\Gamma,\ u(0)=b_0,$

其中$\frac{\partial}{\partial \nu}$表示沿边界$\Gamma$上的点$t$在$\vec{\nu}$方向的方向微商，而$\vec{\nu}$与外线方向$\vec{n}$的交角不超过$\frac{\pi}{2}$，当$t\in\Gamma-\Gamma_0$，$h(t)$是待定的实值函数，$b_0$是实常数。使用公式(3.31)，可将边界条件(5.1)写成复形式

(5.2) $\operatorname{Re}[\overline{\lambda(t)}u_t]=\tau(t)+h(t),\ t\in\Gamma,\ u(0)=b_0,$

这里$\overline{\lambda(t)}=\cos\beta+i\sin\beta=e^{i\beta(t)}$，$\beta(t)$是点$t\in\Gamma$上的$x$轴方向与$\vec{\nu}$的交角，在$\Gamma_0$上，$\cos(\nu,n)$可任意变化，但我们设$\lambda(t)$、$\tau(t)\in C_\alpha(\Gamma)(0<\alpha<1)$，又这里只讨论标数$K=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg\lambda(t)\geqslant N-1$的情形，当$K\geqslant N$时，取$h(t)=0$，而当$K=N-1$时，$h(t)$如(3.19)式中所设。如果在$\Gamma_j$上，$\cos(\nu,n)=0$，$1\leqslant j\leqslant N$，则设

(5.3) $\int_{\Gamma_j}\tau(t)ds=0,\ u(a_j)=b_j,$

这里$a_j\in\Gamma_j$，b_j是实常数，不妨设在$\Gamma_*=\Gamma_1+\cdots+\Gamma_{N_0}(N_0\leqslant N)$上，$\cos(\nu,n)=0$，而在$\Gamma_{**}=\Gamma_{N_0+1}+\cdots+\Gamma_N$上不具有这种性质。此外，我们还要求上述解$u(z)$满足点型条件

(5.4) $\operatorname{Im}[\overline{\lambda(t)}u_t]|_{t=a_j}=b_j,\ j=N+1,\cdots,2K-N+1,$

其中$a_j(j=N+1,\cdots,2N-K+1)$是Γ_0上不同的点，$a_j(j=N+1,\cdots,2K-N+1)$都是实常数。

定理 5.1 设二阶方程(3.56)在区域D上满足条件C，则其问题P_1存在唯一解$u(z)$。

证 令$w(z)=u_z$，我们先求一阶复方程

(5.5) $w_{\bar z}-\operatorname{Re}[A_1(z)w]=A_3(z)$

适合如下边界条件与点型条件之问题B的解$w(z)$。

$$(5.6)\quad \mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)]=\tau(t)+h(t),\ t\in\Gamma,$$

$$(5.7)\quad \mathrm{Im}[\overline{\lambda(a_j)}w(a_j)]=b_j,$$

$$j\in\{j\}=\begin{cases}1,\cdots,\ 2K-N+1,\ K\geqslant N,\\ 1,\cdots,\ N,\ K=N-1.\end{cases}$$

根据第三章定理5.5，上述问题B存在着解$w_0(z)$。由(5.3)式，可知

$$(5.8)\ \mathrm{Re}\int_{\Gamma_j}w_0(z)\,dz=\mathrm{Re}\int_{\Gamma_j}\overline{\lambda(t)}w_0(t)\,d\theta=\mathrm{Re}\int_{\Gamma_j}\tau(t)d\theta=0,$$

$$j=1,\cdots,\ N_0.$$

如果

$$(5.9)\quad \mathrm{Re}\int_{\Gamma_j}w_0(z)dz=0,\ j=N_0+1,\ \cdots,\ N,$$

那么

$$(5.10)\quad u(z)\ =2\mathrm{Re}\int_0^z w_0(z)dz+b_0$$

在区域D内单值，它就是方程（3.56）适合边界条件（5.2）之问题P_1的解。否则，求出齐次复方程

$$(5.1)\quad w_{k\bar z}-\mathrm{Re}[A_1(z)w_k]=0$$

适合边界条件与点型条件

$$(5.12)\quad \mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}w_k(t)]=h(t),\ t\in\Gamma,$$

$$(5.13)\quad \mathrm{Im}[\overline{\lambda(a_j)}w_k(a_j)]$$

$$=\begin{cases}0,\ j=1,\cdots,\ N_0,\ N+1,\cdots,\ 2K-N+1,\\ \delta_{jk}=\begin{cases}1,\ j=k,\\ 0,\ j\neq k,\ j,k=N_0+1,\cdots,N\end{cases}\end{cases}$$

之问题B的线性无关解$w_{N_0+1}(z),\cdots,\ w_N(z)$，若$K=N-1$，则（5.13）式中的$j=1,\cdots,N_0,N+1,\cdots,\ 2K-N+1$代以$j=1,\cdots,N_0$。我们可证$I_{jk}=\mathrm{Re}\int_{\Gamma_j}w_k(z)dz$满足

$$(5.14)\quad J=\begin{vmatrix} I_{N_0+1,N_0+1}\cdots J_{N_0+1,N} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ I_{N,N_0}+1 \quad \cdots \quad J_{N,N} \end{vmatrix} \neq 0.$$

否则，类似于（3.64）的证明，存在不全等于0的实常数

$C_{N_0+1},\cdots$，C_N，使 $w(z)=\sum\limits_{k=N_0+1}^{N} c_k w_k(z)$满足

$$w(a_j^*)=0,\ a_j^*\in\Gamma_j,\ j=1,\cdots,N,K\geqslant N-1;$$
$$w(a_j)=0,\ j=N+1,\cdots 2K-N+1.$$

于是当 $K=N-1$，可得矛盾不等式(3.69)，又当 $K\geqslant N$，则有矛盾不等式

$$(5.15)\quad 2K-N+1-N+2N=2K+1\leqslant 2N_D+N_\Gamma\leqslant 2K,$$

故 $J\neq 0$。这样，仿照(3.70)，存在实常数 $C_{N_0+1},\cdots,C_N$，并将

$$(5.16)\quad w(z)=w_0(z)+\sum_{k=N_0+1}^{N} c_k w_k(z)$$

代入(5.10)式中 $w_0(z)$的位置，所确定的函数 $u(z)$ 便是方程(3.56)适合边界条件(5.2)—(5.4)之问题 P_1 的解。

设 $u_1(z)$、$u_2(z)$ 是(3.56)之问题 P_1 的两个解，设 $u(z)=u_1(z)-u_2(z)$，则 $w(z)=u_z$是齐次方程(5.11)适合齐次边界条件(5.12)与 $\text{Im}[\overline{\lambda(a_j)}\ w\ (a_j)]=0$，$j\in\{j\}$ 之问题 B 的解，故 $w(z)\equiv 0$，$z\in D$。又 $u(0)=0$，因而 $u(z)\equiv 0$，即 $u_1(z)=u_2(z)$，$z\in D$。

二、二阶方程一般的 Poincaré 边值问题

问题 P_2 求系数 $A_j(z)(j=1,2,3)$ 满足条件 C 的二阶方

程

(5.17) $u_{z\bar{z}} - \mathrm{Re}[A_1(z)u_z] - \varepsilon A_2(z)u = A_3(z)$

在闭区域 $\bar{D}$ 上的连续可微解 $u(z)$，使它满足边界条件

(5.18) $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + 2\varepsilon\sigma(t)u(t) = 2\tau(t),\ t\in\Gamma,$

其中 $\vec{\nu}$ 是边界 Γ 上点 t 的任一方向向量，$\varepsilon\ (-\infty<\varepsilon<\infty)$ 是实参数。使用公式(3.31)，可将边界条件(5.18)写成复形式

(5.19) $\mathrm{Re}[\lambda(t)u_t] + \varepsilon\sigma(t)u(t) = \tau(t),\ t\in\Gamma,$

这里$\lambda(t) = \cos\beta + i\sin\beta = e^{i\beta(t)}$，$\beta(t)$是点 $t\in\Gamma$ 上的 x 轴方向与 $\vec{\nu}$ 的交角。在现在的情形下，$\cos(\nu, n)$在 Γ 可正可负，也可等于0，即可以与 Γ 相切。但我们设

(5.20) $C_\alpha[\lambda(t),\Gamma]\leqslant l,\ C_\alpha[\sigma(t),\Gamma]\leqslant l,\ C_\alpha[\tau(t),\Gamma]\leqslant l,$

此处 $\alpha\left(\dfrac{1}{2}<\alpha<1\right)$，$l(0\leqslant l<\infty)$都是实常数，而$K = \dfrac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg\lambda(t)$

称为此边值问题的标数。

一般说来，上述边值问题 P_2 不一定可解，为了导出方程(5.17)之问题 P_2 的可解性结果，我们引入一阶复方程

(5.21) $w_{\bar{z}} - \mathrm{Re}[A_1(z)w] - \varepsilon A_2(z)u = A_3(z)$

适合如下边界条件、点型条件与关系式之问题 Q.

(5.22) $\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)] = \gamma(t) + h(t),\ \gamma(t) = \tau(t) - \varepsilon\sigma(t)u(t),$

$t\in\Gamma,$

(5.23) $u(z) = 2\mathrm{Re}\displaystyle\int_0^z [w(z) + \sum_{j=1}^{N}\frac{id_j}{z-z_j}]dz + C_0,$

这里 $d_j(j=1,\cdots,N)$都是适当选取的实常数，使得由(5.23)等号右边所确定的函数在 D 内单值，C_0 是任意实常数，又

$$
(5.24)\quad h(t)=\begin{cases}0,\ t\in\Gamma,\ K\geqslant N,\\ \left.\begin{array}{l}h_j,\ t\in\Gamma_j,\ 1\leqslant j\leqslant N-K\\ 0,\ t\in\Gamma_j,\ N-K\leqslant j\leqslant N+1\end{array}\right\}0\leqslant K<N,\\ \left.\begin{array}{l}h_j,\ t\in\Gamma_j,\ 1\leqslant j\leqslant N\\ h_0+\operatorname{Re}\sum\limits_{m=1}^{-k-1}(H_m^{+}+iH_m^{-})t^m,\ t\in\Gamma_0\end{array}\right\}k<0,\end{cases}
$$

其中$h_j(j=0,\ 1,\cdots,\ N)$，$H_m^{\pm}(m=1,\cdots,-K-1)$都是待定实常数。

设二阶非齐次方程(5.17)的系数满足条件C，根据第三章定理5.5，一阶复方程(5.5)适合边界条件

$$
(5.25)\quad \operatorname{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)]=\gamma(t)+h(t),\ t\in\Gamma
$$

之边值问题Q_1具有通解

$$
(5.26)\quad \widetilde{w(z)}=w_0(z)+\sum_{m=1}^{n}c_m w_m(z),
$$

这里$w_0(z)$是上述问题Q_1的一特解，$w_m(m=1,\cdots,\ n,$ $n=\begin{cases}2K-N+1,\ K\geqslant N\\ K+1,\ 0\leqslant K<N\end{cases})$是问题$Q_1(A_3(z)=0,\ r(t)=0)$的线性无关解的完全组。又$H_2u$是复方程

$$
(5.27)\quad w_{\bar z}-\operatorname{Re}[A_1(z)w]=A_2(z)u
$$

适合边界条件与点型条件

$$
(5.28)\quad \operatorname{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)]=-\sigma(t)u(t)+h(t),\ t\in\Gamma,
$$

$$
(5.29)\quad \operatorname{Im}[\overline{\lambda(a_j)}w(a_j)]=0,
$$

$$
j\in\{j\}=\begin{cases}1,\cdots,\ 2K-N+1,\ K\geqslant N,\\ N-K+1,\cdots,\ N+1,\ 0\leqslant K<N\end{cases}
$$

之问题Q_2的解，其中a_j，b_j如第三章(5.6)中所述。并可得知H_2是从$u(z)\in C^1(\bar D)$到$w(z)\in C_\beta(\bar D)$ $(\beta=\min(\alpha,1-2/p))$的线

性有界算子。记(5.23)中的积分为 H_1w，即

$$(5.30)\quad H_1w = 2\mathrm{Re}\int_0^z\left[w(z) + \sum_{j=1}^{N}\frac{id_j}{z-z_j}\right]dz.$$

易知 H_1 是从 $w(z)\in C_\beta(\bar{D})$ 到 $u(z)\in C^1(\bar{D})$ 的线性有界的完全连续算子。由(5.30)与 $w(z)=\widetilde{w(z)}+\varepsilon H_2u$，可得非齐次积分方程

$$(5.31)\quad u-\varepsilon H_1H_2u = H_1w_0(z)+b_0+\sum_{m=1}^{n}C_mH_1w_m(z),$$

而 H_1H_2 是 $C^1(\bar{D})$ 上的线性有界的完全连续算子（见书[67]第三章），因此可将 Fredholm 定理应用于(5.31)，设 $\varepsilon_j(j=1, 2, \cdots)$：$0<|\varepsilon_1|\leqslant|\varepsilon_2|\leqslant\cdots\leqslant|\varepsilon_n|\leqslant|\varepsilon_{n+1}|\leqslant\cdots$是齐次积分方程

$$(5.32)\quad u-\varepsilon H_1H_2u=0$$

的离散特征值。

下面先讨论 $K\geqslant N$ 的情形。若 ε 不是前述特征值，则非齐次积分方程（5.32）有解 $u(z)$，它包含有 $2K-N+2$ 个任意实常数。将 $u(z)$ 代入关系式(5.23)，并取其中的 $d_j=0(j=1,\cdots,N)$，便得到 N 个代数方程组。以 S 表示上述任意常数的系数矩阵的秩，$S\leqslant\min(N, 2K-N+2)$，则可确定 $2K-N+2$ 个任意常数中的 S 个，同时也确定了 N 个代数方程中的 S 个等式，如果另外 $N-S$ 个等式也成立，那么从(5.23)所确定的函数 $u(z)$ 便是方程(1.1)之问题 P_2 的解，此时方程（5.17）之问题 P_2 的通解包含有 $2K-N+2-S$ 个任意实常数。又若 ε 是(5.32)秩为q 的特征值，如书[117]1)定理 4.18 的证明，按照 Fredholm 第三定理可写出非齐次方程(5.31) 的可解条件，就得 q 个代数方程组，以确定 $2K-N+2$ 个任意实常数 $C_0, C_1,\cdots, C_{2K-N+1}$，用 S_1 表示对应系数矩阵的秩，$S_1\leqslant\min(q, 2K-N+2)$，则如前可确定 $2K-N+2$

个常数中的 S_1 个，也确定了 q 个代数方程中的 S_1 个等式。然后将所得的含 $2K-N+2+q-S_1$ 个任意常数的解 $u(z)$ 代入 (5.23) 式，令其中的 $d_j=0(j=1, \cdots, N)$ 以 S_2 表示对应系数矩阵的秩，$S_2 \leqslant \min(N, 2K-N+2+q-S_1)$。同时也可由此 N 个代数方程确定 S_2 个等式，并且也确定了 $2K-N+2+q-S_1$ 个常数中的 S_2 个，如果另外 $N-S_2$ 个等式也成立，那么如前，(5.23) 式中的 $u(z)$ 就是方程(5.17)之问题P_2 的解。这样便知，方程(5.17)之问题 P_2 有 $N+q-s_1-s_2$ 个可解条件，而当这些条件成立时，其解 $u(z)$ 包含有 $2K-N+2+q-S_1-S_2$ 个任意实常数。当$K<N$ 时，也可用同样的方法讨论。这样，我们便得以下的结果：

定理 5.2 对于二阶非齐次方程(5.17)之问题 P_2，当 ε 不是相应齐次方程(5.32)的特征值时，有

(1) 当 $K \geqslant N$ 时，其问题 P_2 有 $N-S$ 个可解条件，$S \leqslant \min(N, 2K-N+2)$；

(2) 当 $0 \leqslant K<N$ 时，问题 P_2 的可解条件的个数为 $2N-K-S$，$S \leqslant \min(2N-K, K+2)$；

(3) 当 $K<0$ 时，问题 P_2 在 $2N-2K-1-S$ 个条件下可解，$S \leqslant 1$。

又若 ε 是相应齐次积分方程 (5.32) 秩为 q 的特征值，那么

(4) 当 $K \geqslant N$ 时，问题 P_2 有 $N+q-S$ 个可解条件，$S \leqslant \min(N+q, 2K-N+2+q)$；

(5) 当 $0 \leqslant K<N$ 时，问题 P_2 的可解条件的个数为 $2N-K+q-S$，$S \leqslant \min(2N-K+q, K+2+q)$；

(6) 当 $K<0$ 时，问题 P_2 在 $2N-2K-1+q-S$ 个条件下可解，$S \leqslant \min(2N-2K-1+q, 1+q)$ (可参看[128]31))。

第五章　多个未知函数的椭圆型方程组

本章将讨论多个未知函数的一阶、二阶的线性与非线性一致椭圆型方程组，但主要是讨论一阶线性一致椭圆型方程组．我们先给出超解析函数的概念与一些性质，然后考虑广义超解析函数的性质与一些边值问题，进而介绍一类多个未知函数的一阶线性椭圆型方程组的问题，最后将研究较一般的一阶、二阶椭圆型方程组的某些基本边值问题．本章中所得的结果是前两章中的一些结果的推广．

§1　广义超解析函数的概念与性质

本节将引进超复数与超解析函数的概念，然后介绍广义超解析函数的 Green 公式与 Cauchy 积分公式．

一、超复数的概念

引进满足以下条件的元素 i、e：

(1.1)　　$i^2=-1,\ ie=ei,\ e^0=1,\ e^r=0,$

这里 r 为正整数，而 e 可取为 $r\times r$ 方阵

(1.2)
$$e=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&0\\1&\cdots&0&0\\\vdots&&&\vdots\\0&\cdots&1&0\end{pmatrix}.$$

用 $a_k(k=0,\ 1,\cdots,\ r-1)$ 表示 r 个复数，则称

(1.3) $$a=\sum_{k=0}^{r-1}a_k e^k$$

为**超复数**. 超复数可仿复数那样定义加、减、乘三种运算，并定义 $|a|=\sum_{k=0}^{r-1}|a_k|$，容易验证

(1.4) $$|ab|\leqslant|a||b|,\quad |a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

a_0 称为 a 的复数部分，如果 $a_0\neq 0$，则超复数 a 具有倒数

$$a^{-1}\ 或\ \frac{1}{a}=a'=\sum_{k=0}^{r-1}a'_k e^k.$$

事实上，只要确定 $a'=\sum_{k=0}^{r-1}a'_k e^k$，使得

$$aa'=\left[\sum_{k=0}^{r-1}a_k e^k\right]\left[\sum_{k=0}^{r-1}a'_k e^k\right]=1,$$

比较系数，可得 $a'_0=\frac{1}{a_0}$，$a'_1=-\frac{a_1 a'_0}{a_0}=-\frac{a_1}{a_0^2}$，依次类推，可确定 $a'_2,\cdots,a'_{r-1}$。反之，也容易看出：a 具有倒数，则 $a_0\neq 0$。

现在用超复数表示复方程组

(1.5) $$\begin{cases} w_{0\bar z}=A_{00}w_0+B_{00}\overline{w_0}+F_0, \\ w_{1\bar z}+Q_1 w_{0\bar z}=A_{11}w_1+B_{11}\overline{w}_1+A_{10}w_0+B_{10}\overline{w}_0+F_1 \\ \cdots \\ w_{r-1\bar z}+Q_1 w_{r-2\bar z}+\cdots+Q_{r-1}w_{0\bar z}=A_{r-1,r-1}w_{r-1} \\ \quad +B_{r-1,r-1}\overline{w_{r-1}}+A_{r-1,r-2}w_{r-2}+B_{r-1,r-2}\overline{w_{r-2}}+\cdots \\ \quad +A_{r-1,0}w_0+B_{r-1,0}\overline{w_0}+F_{r-1}, \end{cases}$$

引入超复变函数 $w(z)$、$F(z)$ 及 Q、A、B

$$(1.6)\quad w(z)=\sum_{k=0}^{r-1}e^k w_k(z)=(w_0(z),\ \cdots,\ w_{r-1}(z))',$$

$$F(z)=\sum_{k=0}^{r-1}e^k F_k(z),$$

$$(1.7)\quad Q=\sum_{k=1}^{r-1}e^k Q_k=\begin{pmatrix}0 & \ddots & \cdots\cdots & 0\\ Q_1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ Q_{r-1} & \cdots & Q_1 & 0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}A_{00} & & 0\\ \vdots & \ddots & \\ A_{r-1,0} & \cdots & A_{r-1,r-1}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}B_{00} & & 0\\ \vdots & \ddots & \\ B_{r-1,0} & \cdots & B_{r-1,r-1}\end{pmatrix}$$

$Q_k=Q_k(z)$，$A_{jk}=A_{jk}(z)$，$B_{jk}=B_{jk}(z)$，j、$k=0$，$\cdots$，$r-1$，$Q_0=0$，则（1.5）可简写成

$$(1.8)\qquad Dw=Aw+B\overline{w}+F,$$

这里 $D=(\quad)_{\bar z}+Q(\quad)_z$。容易看出：当 $r=1$，则（1.5）就是第三章中的复方程（0.3）或（2.1）。

二、超解析函数的概念

现在考虑特殊的复方程组

$$(1.9)\qquad Dw=0,$$

不妨设 D 是有界区域并把在 D 内几乎处处满足（1.9）的正则解 $w(z)=\sum_{k=0}^{r-1}e^k w_k(z)$ 称为超解析函数，这里所说的正则解的意义与第三章开头所说的相仿，其中 $w_k(z)(k=0,\ \cdots,\ r-1)$ 均在 D 连续，且属于 $D_{\bar z}$。

容易看出：$t_0(z)=z$ 是 $w_{0\bar{z}}=0$ 的一个解，$t_k(z)=-T\left[\sum_{j=1}^{k}Q_j(\zeta)(t_{k-j}(\zeta))_{\zeta}\right]$ 是 $w_{k\bar{z}}+\sum_{j=1}^{k}Q_jw_{k-j\bar{z}}=0$ 的解，$k=1,\cdots,r-1$，而

$$t(z)=\sum_{k=0}^{r-1}e^k t_k(z)=z+E(z) \tag{1.10}$$

称为一个生成解。又超复数的多项式 $P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k[t(z)]^k$（$a_0,\cdots,a_n$ 都是复数）也是（1.9）的一个解。

以下先给出两个定理：

定理 1.1 设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 为解析函数的幂级数展开式，其收敛圆为 $D=\{|z|<R\}$，又 E 是无零幂的超复数，即 e^0 的系数为 0 的超复数，则

$$f(z+E)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z+E)^k \tag{1.11}$$

在 D 内也收敛，且在 D 内闭绝对且一致收敛，并有

$$f(z+E)=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(z)}{k!}E^k. \tag{1.12}$$

特别对（1.10）式中所示的生成解 $t(z)=z+E(z)$，有

$$F(z)=f(t(z))=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(z)}{k!}[E(z)]^k. \tag{1.13}$$

又 $F(z)$ 是 D 内的超解析函数，即

(1.14) $$DF(z)=0.$$

证 记 $f_{n,m}(z)=\sum_{k=n}^{m}a_kz^k$，由于 $|a_k(z+E)^k|\leqslant|a_k|\cdot|(z+E)^k|\leqslant|a_k|\,|z^k+C^1z^{k-1}E+\cdots+C_k^{r-1}z^{k-r+1}E^{r-1}|\leqslant|a_k|C(r)k^{r-1}\max(1,|E|^{r-1})\max(|z|^k,|z|^{k-r+1})$，则 $|f_{n,m}(z+E)|\leqslant C(r)\max(1,|E|^{r-1})$

$$\max\left(\sum_{k=m}^{n}k^{r-1}|a_k|\,|z|^k,\ \sum_{k=m}^{n}k^{r-1}|a_k||z|^{k-r+1}\right),$$ 取 m 充分大，使得 $k^{r-1}\leqslant 2k(k-1)\cdots(k-r+2)$，当 $k\geqslant m$，而 $|f_{n,m}(z+E)|\leqslant 2C(r)\max(1,|E|^{r-1})\max(1,|z|^{r-1})\cdot$

$$\cdot\sum_{k=m}^{n}k(k+1)\cdots(k-r+2)|a_k||z|^{k-r+1},$$

易知：当 m，$n\to\infty$，上式右边在 $D=\{|z|<R\}$ 内均趋于0．并可证（1.11）中的级数在 D 内闭绝对且一致收敛．

我们可在 $|z|\leqslant R_0(<R)$ 内任意调换级数（1.11）中各项的次序，而所得新的级数仍收敛，且其和数还是 $f(z+E)$．在（1.11）式的级数展开式中，分别合并所有的 E^0、E^1、…、E^{r-1}、E^r、…项，可得

E^0 的系数为 $\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=f(z)$,

E^1 的系数为 $\sum_{k=0}^{\infty}ka_kz^{k-1}=f'(z)$,

E^{r-1} 的系数为 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{1\cdot 2\cdots(r-1)}a_kz^{k-r+1}=\frac{f^{(r-1)}(z)}{(r-1)!}$,

$E^j(j=r,\ r+1,\cdots)$ 的系数均为 0。
因此在 $|z|\leqslant R_0$ 上，(1.12) 式成立。特别有 (1.13) 式。

又不难得知：$DF(z)=f'(t(z))Dt(z)$，因而在 D 内 (1.14) 式成立，即 $F(z)$ 是 D 内的超解析函数。

定理 1.2 设 $F(z)$ 是圆 $D=\{|z|<R\}$ 内的超解析函数，则在 D 内，有

$$F(z)=\sum_{k=0}^{r-1}f_k(t(z))e^k, \tag{1.15}$$

其中 $t(z)$ 为 (1.9) 的生成解，$f_k(z)(k=0,\ 1,\ \cdots,\ r-1)$ 都是 D 内的解析函数。

证 记 $F(z)=\sum\limits_{k=0}^{r-1}F_k^0(z)e^k$，因 $DF(z)=0$，可得 $[F_0^0(z)]_{\bar z}=0$，当 $z\in D$。由 (1.13)，知 $F_0(t(z))$ 是 D 内的超解析函数，考虑

$$G_1(z)=F(z)-F_0^0(t(z))=\sum_{k=0}^{r-1}F_k^1(z)e^k.$$

又从 (1.13)，知 $F_0^1(z)=0$，且 $DG_1(z)=0$，而 $F_1^1(z)$ 为 D 内的解析函数。再作

$$G_2(z)=F(z)-F_0^0(t(z))-F_1^1(t(z))e=\sum_{k=0}^{r-1}F_k^2(z)e^k,$$

显然 $F_0^2(z)=F_1^2(z)\equiv 0$，且 $DG_2(z)=0$，而 $F_2^2(z)$ 是 D 内的解析函数。依此类推，可得

$$G_{r-1}(z)=F(z)-\sum_{k=0}^{r-2}F\ (t(z))e^k=F_{r-1}^{r-1}(z)e^{r-1},$$

而 $F_{r-1}^{r-1}(z)$ 是 D 内的解析函数，再从（1.13），知 $F_{r-1}^{r-1}(z)e^{r-1}=F_{r-1}^{r-1}(t(z))e^{r-1}$。于是有

$$F(z)=\sum_{k=0}^{r-1}F_k^k(t(z))e^k.$$

定理1.2证毕。

因为从定理1.1，如果 $f_k(z)(k=0,\ 1,\cdots,\ r-1)$ 是 D 内的解析函数，则 $f_k(t(z))e^k$ 是 D 内的超解析函数，故 $\sum\limits_{k=0}^{r-1}f_k(t(z))e^k$ 也是超解析函数。这表明以上两个定理互为逆定理。

三、广义 Green 公式

复方程组（1.8）的共轭方程组为

(1.16) $$Dw'=-Aw'-B^*\overline{w}',\quad B^*(z)=\overline{B(z)t(z)}/t(z),$$

此处设 $Q(z)\in W_p^1(D)$，即 $Q_k(z)\in W_p^1(D)$，$k=0,\ \cdots,\ r-1$，又 $A(z)$、$B(z)$、$F(z)\in L_p(\overline{D})$，$p(>2)$ 是实常数，$[t(z)]_s'=t_zz_s+t_{\bar{z}}\bar{z}_s$；$ds$ 是区域 D 的边界 Γ 的弧长微元，这里还假定 Γ 是逐段光滑闭曲线，即 $\Gamma\in C^1$。设 $w(z)$、$w^1(z)$ 分别是复方程组（1.8）与（1.16）于区域 D 上的解，由 Green 公式，有

(1.17) $$\frac{1}{2i}\int_\Gamma w(z)w'(z)dt(z)$$

$$=\frac{1}{2i}\int_\Gamma w(z)w'(z)(t_zdz+t_{\bar{z}}d\bar{z})$$

$$=\frac{1}{2i}\int_\Gamma w(z)w'(z)t_z(dz-Q(z)d\bar{z})$$

$$=\iint_D[(ww't_z)_{\bar{z}}+(ww'Qt_z)_z]d\sigma_z$$

$$= \iint_D \{t_z w' D w + w[(t_z w')_{\bar z} + (Q t_z w')_z]\} d\sigma_z =$$

$$= \iint_D \{t_z (w' D w + w D w') + w w' [t_{z\bar z} + (Q t_z)_z]\} d\sigma_z,$$

由于在 D 内有

$$t_{z\bar z} + (Q t_z)_z = [D t(z)]_z = 0,$$

则从（1.17）得

$$\text{(1.18)} \qquad \operatorname{Re} \frac{1}{2i} \int_\Gamma w(z) w'(z) dt(z) =$$

$$= \operatorname{Re} \iint_D t_z [w'(Dw - Aw - B\bar w) + w(Dw' + Aw' + B^* \bar w')] d\sigma_z$$

$$= \operatorname{Re} \iint_D t_z w' F dx dy.$$

这样我们便得以下定理：

定理 1.3 设有界区域 D 的边界 $\Gamma \in C^1$，又 $Q(z) \in W_p^1(D)$，$A(z)$、$B(z)$、$F(z) \in L_p(\bar D)$，$p > 2$，则对方程组（1.8）与(1.16)于 $\bar D$ 上连续的正则解 $w(z)$，$w'(z)$，有

$$\text{(1.19)} \qquad \frac{1}{2i} \int_\Gamma w(z) w'(z) dt(z) = \iint_D t_z (w' D w + w D w') d\sigma_z,$$

并且（1.18）式成立。如果 $w(z)$ 是（1.8）的齐次方程组的解，此时 $F(z) = 0$，则有

$$\text{(1.20)} \qquad \operatorname{Re} \int_\Gamma w(z) w'(z) dt(z) = 0.$$

四、广义 Liouville 定理

在第三章的定理 1.1，我们给出了广义解析函数的相似原理，特别是 Liouville 定理，现在我们给出（1.8）的齐次方程组

$$(1.21)\qquad Dw = Aw + B\bar{w},\ A(z)、B(z) \in L_{p,2}(\bar{D})$$

的相应结果，而（1.21）在区域 D 内的连续解就称为广义超解析函数。

先要说明：若 $w(z) = \sum_{k=0}^{r-1}(u_k + iv_k)e^k$ 是方程组（1.9）在全平面 E 上的正则解，也就是超解析函数。从一中可知，$w(z)$ 具有倒数的充要条件是 $u_0 + iv_0 \neq 0$。由于 $(u_0 + iv_0)_{\bar{z}} = 0$，即 $u_0 + iv_0$ 是 R 上的解析函数，如果它不是常数，则它的零点是孤立的。故若 $w(z)$ 不是常数，它不具有倒数的点也是孤立的。

又对于超解析函数，关于解析函数的可去奇点定理仍成立。事实上，设 $w(z) = \sum_{k=0}^{r-1} w_k(z)e^k$ 是（1.9）在 G：$0 < |z - z_0| \leqslant R_0$ $(< \infty)$ 上有界的正则解，这里 G 是 D 内一区域，由于 $w_0(z)$ 是 $w_{0\bar{z}} = 0$ 在 G 内有界的正则解，也就是解析函数，故 z_0 是 $w_0(z)$ 的可去奇点，定义 $w_0(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} w_0(z)$ 然后考虑复方程 $w_{1\bar{z}} + Q_1 w_{0z} = 0$，只要 $Q_1(z)$ 在 G 上有界可测，则 $Q_1 w_{0z} \in L_p(\bar{G})$，那么由第三章定理 1.9，$w_1(z)$ 可表示成 $w_1(z) = \Phi_1(z) + \psi_1(z)$，$\psi_1(z) = TQ_1 w_{0z}$ 在 G 内有界连续，$\Phi_1(z)$ 在 G 内有界解析，因此 z_0 是 $\Phi_1(z)$ 的可去奇点，定义 $w_1(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} w_1(z)$。依次类推，均可定义 $w_k(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} w_k(z)$，$k = 2, \cdots, r-1$，这就表明 z_0 是超解析函数 $w(z)$ 的可去奇点，并有 $w(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} w(z)$。

为了后面的需要，现在引入超复变函数 $w(z)$ 的重积分

$$(1.22)\qquad w(z) = J\omega = -\frac{1}{\pi}\iint_E \frac{t_\zeta \omega(\zeta)}{t(\zeta) - t(z)} d\sigma_\zeta.$$

如果 $\omega(z) \in L_{p,2}(E)$，$2 < p < \infty$，使用书[117]1) 中的方法，可证

(1.23) $$|w(z)| \leqslant M_1 L_{p,2}(\omega, E),$$

(1.24) $$|w(z_1) - w(z_2)| \leqslant M_2 L_{p,2}(\omega, E)|z_1 - z_2|\beta, \quad z_1, z_2 \in E,$$

(1.25) $$|w(z)| \leqslant M_3 L_{p,2}(\omega, E)|z|^{-\beta}, \text{ 当 } |z| \geqslant R > 1,$$

这里 $\beta = 1 - 2/p$，R 都是正 数，$M_j = M_j(p)$，$j = 1, 2$，$M_3 = M_3(p, R)$。

定理 1.4 设 $\omega(z)$ 是超复变函数，$\omega(z) \in L_{p,2}(\bar{D})$，$p > 2$，又 $t(z)$ 是前述生成解，则在区域 D 内，有

(1.26) $$D(J\omega) = \omega(z).$$

证 对任意的超复变函数 $\varphi(z) \in D_1^1(D)$，有

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{t(\zeta) - t(z)} dt(\zeta) + J(D\varphi) = J(D\varphi),$$

故

$$\iint_D t_z \omega(z)\varphi(z)\, d\sigma_z = \iint_D t_z \omega(z)\left(-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{t_\zeta(\zeta) D\varphi}{t(\zeta) - t(z)} d\sigma_\zeta\right) d\sigma_z$$

$$= -\iint_D t_\zeta(\zeta)\, D\varphi\left(-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{t_z(z)\omega(z)}{t(z) - t(\zeta)}\, d\sigma_z\right) d\sigma_\zeta$$

$$= -\iint_D t_\zeta(\zeta) D\varphi J\omega d\sigma_\zeta,$$

上式是对于超复变函数的广义微商公式，因而 (1.26) 式成立。

以上结果也可推广到全平面 E 上去。

定理 1.5 设 $w(z)$ 是复方程组 (1.21) 于全平面 E 上的有界连续解，则 $w(z)$ 可表示成

(1.27) $$w(z) = ce^{\varphi(z)}, \quad \varphi(z) = J\omega, \quad \omega(z) \in L_{p,2}(E),$$

这里 $\varphi(z) \in C_\beta(E)$，$\beta = 1 - 2/p$，c 为一超复常数。

证 如果 $w(z) \equiv 0$，$z \in D$，我们可取 $\varphi(z) \equiv 0$，$c = 0$。如果 $w(z) = \sum_{k=0}^{r-1} w_k(z) e^k$ 不恒等于 0，则在 $0 \leqslant k \leqslant r-1$ 中必有一整数 K，使得 $w_k(z) \equiv 0$，当 $0 \leqslant k < K$，而 $w_K(z) \not\equiv 0$，故有

$$w_{K\bar{z}} = A_{KK}w_K + B_{KK}\bar{w}_K.$$

因 $w_K(z)$ 是 E 上有界的广义解析函数，它不恒为 0，由广义解析函数的 Liouville 定理，可知 $w_K(z)$ 在 E 上没有零点，故 $|w_K(z)| \geqslant \delta$，$\delta$ 是一正常数。记

$$\omega = \left(\sum_{k=K}^{r-1} w_k e^{k-K}\right)^{-1} \sum_{k=K}^{r-1} e^{k-K} \sum_{m=0}^{k} (A_{km}w_m + B_{km}\bar{w}_m),$$

易知 $\omega \in L_{p,2}(E)$ 及

$$(1.28) \qquad w\omega = e^K\left(\sum_{k=K}^{r-1} w_k e^{k-K}\right)\omega$$

$$= \sum_{k=K}^{r-1} e^k \sum_{m=0}^{k} (A_{km}w_m + B_{km}\bar{w}_m) = Dw.$$

记

$$\varphi = J\omega, \quad \Phi(z) = w(z)e^{-\varphi(z)},$$

由定理 1.4，有

$$(1.29) \qquad D\Phi = D\dot{w}e^{-\varphi} - wD\varphi e^{-\varphi} =$$

$$= w\omega e^{-\varphi} - w\omega e^{-\varphi} = 0.$$

这表明 $\Phi(z)$ 是 E 上的超解析函数。由于 (1.23)，可知 $\varphi(z)$ 是有界的，且

$$\varphi(z) = 0(|z|^{-\beta}), \quad \beta = 1 - 2/p, \text{ 当}|z|\text{足够大。}$$

因为对超解析函数，相应的 Liouville 定理仍成立，故 $\Phi(z) = c$，c 是一超复常数。这样，便知 $w(z)$ 具有表示式 (1.27)。

以上定理实际上就是广义超解析函数的 Liouville 定理。

五、广义超解析函数的基本核

为了证明广义超解析函数基本核的存在性，现在先证以下定

理：

定理 1.6 对于复方程组 (1.21)，其中系数 $A(z)$、$B(z)\in L_{p,2}(E)$，$2<p<\infty$，则存在两个函数：

$$(1.30)\qquad X_1(z,\zeta)=\frac{\exp[\omega_1(z)-\omega_1(\zeta)]}{2[t(\zeta)-t(z)]},$$

$$X_2(z,\ \zeta)\ =\frac{\exp[\omega_2(z)-\omega_2(\zeta)]}{2i[t(\zeta)-t(z)]},$$

这里$\omega_j(z)\in C_\beta(E)$，$\beta=1-2/p$. $\omega_j(z)=O(|z|^{-\beta})$，当$|z|$充分大，$j=1$，2，又它们是复方程组

$$(1.31)\qquad [X_j(z,\ \zeta)]_{\bar z}+A(z)X_j(z,\ \zeta)+B(z)\overline{X_j(z,\ \zeta)}=0,$$

$j=1$，2 于 $E-\{\zeta\}$上的解，称为 (1.21)的基本解组。

证 先讨论 $X_1(z,\ \zeta)$。任意选定一复数 ζ，并定义 $\tilde B(z)=B(z)[t(z)-t(\zeta)]/\overline{[t(z)-t(\zeta)]}$，易知 $\tilde B(z)\in L_{p,2}(E)$，记 $Pw(z)=J(Aw+\tilde B\bar w)(z)-J(Aw+\tilde B\bar w)(\zeta)$，我们要证积分方程组

$$(1.32)\qquad w(z)+Pw(z)=1$$

在 $C(E)$ 中有唯一解 $w(z)$，根据积分方程组的理论，这只要证齐次积分方程组

$$(1.33)\qquad v(z)+Pv(z)=0$$

使 $v(\zeta)=0$ 的解恒等于 0。设 $v(z)\in C(E)$ 是积分方程组 (1.33) 的解，那么可知，$v(z)$ 也是复方程组

$$(1.34)\qquad Dv+Av+\tilde B\bar v=0$$

于全平面 E 上的连续解，由于$v(\zeta)=0$，从定理 1.5 知$v(z)\equiv 0$。

其次，以 $w(z)$表示积分方程组(1.32)在 $C(E)$ 中的唯一解，则它也是复方程组(1.34) 的解，根据定理 1.5，$w(z)$ 可表示成

$$(1.35)\qquad w(z)=Ce^{\omega(z)}=e^{\omega 1(\zeta)-\omega(\zeta)},$$

其中常数 $c=e^{-\omega 1(\zeta)}$，$\omega_1(z)=\omega(z)$。而 (1.30) 第一式所示的 $X_1(z,\ \zeta)$ 正是复方程组 (1.31)($j=1$) 所要求的解。用类似方法也可求得 $X_2(z,\ \zeta)$。

我们称

$$(1.36)\quad \Omega_1(z,\ \zeta)=X_1(z,\zeta)+iX_2(z,\zeta),$$
$$\Omega_2(z,\ \zeta)=X_1(z,\ \zeta)-iX_2(z,\ \zeta),$$

为广义超解析函数的基本核，它们具有下列性质：

定理 1.7 基本核 $\Omega_1(z,\ \zeta)$、$\Omega_2(z,\ \zeta)$ 在 $E-\{\zeta\}$ 满足

$$(1.37)\begin{cases} D[\Omega_1(z,\ \zeta)]+A(z)\Omega_1(z,\ \zeta)+B(z)\overline{\Omega_2(z,\ \zeta)}=0, \\ D[\Omega_2(z,\ \zeta)]+A(z)\Omega_2(z,\ \zeta)+B(z)\overline{\Omega_1(z,\ \zeta)}=0, \end{cases}$$

且对固定的一复数 ζ，当 $|z-\zeta|\to 0$ 时，有

$$(1.38)\qquad \Omega_1(z,\ \zeta)=\frac{1}{t(\zeta)-t(z)}+O(|z-\zeta|^{-2/p}),$$
$$\Omega_2(z,\ \zeta)=O(|z-\zeta|^{-2/p}),$$

又当 $|z|\to\infty$ 时，有

$$(1.39)\qquad \Omega_j(z,\ \zeta)=O(|z|^{-1}),\ j=1,\ 2.$$

证 从定理 1.6，不难得知：$\Omega_1(z,\ \zeta)$、$\Omega_2(z,\ \zeta)$ 在 $E-\{\zeta\}$ 满足（1.37）与（1.39）。为了证明（1.38），我们注意到定理 1.1，并取其中的 $f(z)=e^z$，则有

$$(1.40)\qquad e^{z+E}=e^z\sum_{k=0}^{r-1}\frac{E^k}{k!},$$

这表明：当 $z+E$ 有界时，e^{z+E} 满足一致 Lipschitz 连续的条件。由于 $\omega_j(z)$ $(j=1,\ 2)$ 是有界的，因此存在正常数 M_4，使得

$$\left|\Omega_1(z,\ \zeta)-\frac{1}{t(\zeta)-t(z)}\right|$$
$$=\left|\frac{\exp[\omega_1(z)-\omega_1(\zeta)]-\exp 0+\exp[\omega_2(z)-\omega_2(\zeta)]-\exp 0}{2[t(\zeta)-t(z)]}\right|$$
$$\leqslant M_4(|\omega_1(z)-\omega_1(\zeta)|+|\omega_2(z)-\omega_2(\zeta)|)/2|\zeta-z|,$$

从上式便知有（1.38）的第一式。同理可证（1.38）的第二式。

六、广义超解析函数的 Cauchy 公式

先证明如下的定理：

定理 1.8 设 D 是一有界区域，其边界 Γ 是有限条逐段光滑的简单的闭曲线 Γ 组成；又复方程组（1.21）的系数 $A(z)$、$B(z)$ 如定理 1.6 中所设；函数 $w(z)$ 在 $\bar{D}=D+\Gamma$ 上连续，它是（1.21）于 D 内的解，则有积分公式

$$(1.41)\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} w(z)\Omega_1'(z,\ \zeta)\,dt(z)-\overline{w(z)\Omega_2'(z,\ \zeta)\,dt(z)}$$

$$=\begin{cases} w(\zeta), & \text{当}\ \zeta\in D, \\ 0, & \text{当}\ \zeta\bar{\in} D, \end{cases}$$

其中 $\Omega_1'(z,\ \zeta)$、$\Omega_2'(z,\ \zeta)$ 是共轭复方程组

$$(1.42)\qquad Dv+Av+B^*\bar{v}=0,\ \ B^*=\bar{B}$$

的基本核。

证 设 $X_j'(z,\ \zeta)\,(j=1,\ 2)$ 为复方程组（1.42）的基本解组，取 ε 为足够小的正数，记 $\Gamma_\varepsilon=\{|z-\zeta|=\varepsilon\}$，则如第三章（2.17）的证法，有

$$\int_{\Gamma} w(z)X_j'(z,\zeta)\,dt(z)-\overline{w(z)X_j'(z,\ \zeta)\,dt(z)}$$

$$=\begin{cases} \int_{\Gamma_\varepsilon} w(z)X_j'(z,\ \zeta)\,dt(z)-\overline{w(z)X_j'(z,\ \zeta)\,dt(z)}, & \text{当}\ \zeta\in D, \\ 0, \ \text{当}\ \zeta\bar{\in}\bar{D},\ \ j=1,\ 2, \end{cases}$$

并且易得

$$\int_{\Gamma} w(z)\Omega_1'(z,\ \zeta)\,dt(z)-\overline{w(z)\Omega_2'(z,\ \zeta)\,dt(z)}$$

$$=\begin{cases} \int_{\Gamma_\varepsilon} w(z)\Omega_1'(z,\zeta)\,dt(z)-\overline{w(z)\Omega_2'(z,\ \zeta)\,dt(z)}, & \text{当}\ \zeta\in D, \\ 0, & \text{当}\ \zeta\bar{\in}\bar{D}, \end{cases}$$

其中 $\Omega_j'(z,\ \zeta)\,(j=1,\ 2)$ 是（1.42）的基本核，又因

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} w(z)\Omega_1'(z,\ \zeta)\,dt(z)-\overline{w(z)\Omega_2'(z,\ \zeta)\,dt(z)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{w(z)}{t(\zeta)-t(z)}\,dt(z)$$

$$= -2\pi i w(\zeta), \quad 当\ \zeta \in D,$$

于是知（1.41）式成立。

定理 1.9　在定理 1.8 所设的条件下，则有如下的广义超解析函数的 Cauchy 公式。

$$(1.43)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma w(\zeta)\Omega_1(z, \zeta)dt(\zeta) - \overline{w(\zeta)}\Omega_2(z, \zeta)\overline{dt(\zeta)}$$

$$= \begin{cases} w(z), & 当\ z \in D, \\ 0, & 当\ z \bar{\in} \bar{D}, \end{cases}$$

这里 $\Omega_j(z, \zeta)(j=1, 2)$ 是复方程组（1.9）的基本核。

证　（1.41）式可写成

$$(1.44)\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma w(\zeta)\Omega_1'(\zeta, z)dt(\zeta) - \overline{w(\zeta)\Omega_2'(\zeta, z)\,dt(\zeta)}$$

$$= \begin{cases} w(z), & 当\ z \in D, \\ 0, & 当\ z \bar{\in} \bar{D}, \end{cases}$$

因此我们只要证明

$$(1.45)\quad \Omega_1(z, \zeta) = -\Omega_1'(\zeta, z), \quad \Omega_2(z, \zeta) = -\overline{\Omega_2'(\zeta, z)}.$$

事实上，取 ε 为足够小的正数，并记 $\Gamma_\varepsilon = \{|z-\zeta| = \varepsilon\}$，$\Gamma_{1/\varepsilon} = \left\{|z-\zeta| = \frac{1}{\varepsilon}\right\}$。根据定理 1.8，有

$$(1.46)\quad X_j(z, \zeta)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon + \Gamma_{\frac{1}{\varepsilon}}} X_j(s, \zeta)\Omega_1'(s, z)dt(s) - \overline{X_j(s, \zeta)\Omega_2'(s, z)dt(s)},$$

再由（1.36）与定理 1.7，可得：当 $|s-\zeta|\to 0$ 时，有

$$(1.47)\quad X_1(s, \zeta) = \frac{1}{2[t(\zeta) - t(s)]} + O(|s-\zeta|^{-2/p}),$$

$$X_2(s, \zeta) = \frac{1}{2i[t(\zeta) - t(s)]} + O(|s-\zeta|^{-2/p}),$$

又当$|s|\to\infty$时，有

(1.48) $\quad \Omega_j'(s,\ z)=O(|s|^{-1}),\ X_j(s,\ \zeta)=O(|s|^{-1}), j=1,\ 2.$

在（1.46）中，让$\varepsilon\to 0$，并使用（1.47）、（1.48），可得

$$(1.49)\begin{cases} X_1(z,\ \zeta)=-\dfrac{1}{2}[\Omega_1'(\zeta,\ z)+\overline{\Omega_2'(\zeta,\ z)}],\\ X_2(z,\ \zeta)=-\dfrac{1}{2i}[\Omega_1'(\zeta,\ z)-\overline{\Omega_2'(\zeta,\ z)}],\end{cases}$$

从上式即知（1.45）式成立。

§2 广义超解析函数的边值问题

本节将讨论广义超解析函数的Haseman边值问题与Riemann-Hilbert边值问题。我们仍设区域D是有界$N+1$连通区域，其边界$\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_1+\cdots+\Gamma_N\in C_\alpha^1(0<\alpha<1)$，$\Gamma_1$，…、$\Gamma_N$在$\Gamma_0$所围的有界区域内，又$0\in D$，并记$D^+=D$，$D^-=E\backslash\overline{D^+}=D_0^-+\cdots+D_N^-$，这里$E$是包含点$\infty$的复平面，$D_0^-$是以$\Gamma_0$为边界的无界区域，$D_j^-$是以$\Gamma_j$为边界的有界区域，$j=1,\cdots,N$。

一、广义Cauchy型积分与Plemlj公式

设$f(\zeta)\in C_\alpha(\Gamma)$，$0<\alpha<1$，而

$$(2.1)\quad S(\tau)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{t(\zeta)-t(\tau)}dt(\zeta),\ \tau\in\Gamma$$

就称为广义cauchy型积分，这里$t(z)$是复方程组（1.9）的生成解。积分（2.1）理解为在Cauchy主值意义下的，即设τ是Γ上任一点，以τ为中心、ε为半径作一圆周，交Γ于τ'、τ''，且用γ表示曲线$\widehat{\tau'\tau\tau''}$。可以证明：（2.1）的主值是

$$(2.2)\quad S(\tau)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma-\gamma}\frac{f(\zeta)}{t(\zeta)-t(\tau)}dt(\zeta)$$

$$=f(\tau)+\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)-f(\tau)}{t(\zeta)-t(\tau)}dt(\zeta).$$

现在考虑

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}dt(\zeta),\quad z\in D^{+}\text{或}D^{-}. \tag{2.3}$$

设 τ 是 Γ 上任一点，且当 $z(\in D^{+})\to\tau$ 时，有

$$\Phi^{+}(\tau)=\lim_{z(\in D^{+})\to\tau}\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)-f(\tau)}{t(\zeta)-t(\tau)}dt(\zeta) \tag{2.4}$$

$$+\lim_{z\to\tau}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{t(\zeta)-t(z)}dt(\zeta)$$

$$=\frac{1}{2}[s(\tau)-f(\tau)]+f(\tau)=\frac{1}{2}[s(\tau)+f(\tau)],$$

在上式推算中，使用了

$$\lim_{z(\in D^{+})\to\tau}\int_{\Gamma}\frac{1}{t(\zeta)-t(z)}dt(\zeta)=\lim_{z\to\tau}\ln[t(\zeta)-t(z)]$$

$$=\lim_{z\to\tau}\ln(z-\tau)=\pi i.$$

类似地，可得

$$\Phi^{-}(\tau)=\lim_{z(\in D^{-})\to\tau}\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)-f(\tau)}{t(\zeta)-t(\tau)}dt(\zeta) \tag{2.5}$$

$$+\lim_{z\to\tau}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{t(\zeta)-t(z)}dt(\zeta)$$

$$=\frac{1}{2}[s(\tau)-f(\tau)]$$

这样，我们便得关于超解析函数的 Plemlj 公式

定理 2.1 设 $f(\tau)\in C_{\alpha}(\Gamma)$，$0<\alpha<1$，且 $s(\tau)$ 与 $\Phi(z)$ 分别如 (2.1) 与 (2.3) 所示，那么对 $\tau\in\Gamma$，有

$$\Phi^{+}(\tau)=\frac{1}{2}[s(\tau)+f(\tau)],\quad \Phi^{-}(\tau)=\frac{1}{2}[s(\tau)-f(\tau)], \tag{2.6}$$

也可写成(2.7) $\Phi^+(\tau)+\Phi^-(\tau)=s(\tau),\Phi^+(\tau)-\Phi^-(\tau)=f(\tau)$。并且 $\Phi(z)\in C_\alpha(\bar{D})$。

证 (2.6) 式在前面已证。从 (2.6) 易得 (2.7) 式。至于 $\Phi(z)\in C_\alpha(\bar{D}^\pm)$ 可从解析函数 Cauchy 型积分相应的性质导出。

二、广义超解析函数的 Riemann 边值问题

现在我们讨论 (1.8) 的齐次复方程组 (1.21)，即

(2.8) $\quad Dw=Aw+B\bar{w},\ D=(\quad)_{\bar{z}}+Q(\quad)_z,$

其中 Q、A、B 如 (1.7) 式所示，A、B 在点∞的邻域为 0，且满足

(2.9) $\quad \begin{cases}|Q_k|\leqslant q_0<\infty,\ L_p[A_{jk},E]\leqslant k_0<\infty,\\ L_p[B_{jk},E]\leqslant k_0,\ j,\ k=0,\ 1,\cdots,\ r-1,\end{cases}$

这里 q_0、k_0，$p(>2)$ 都是实常数，并把求复方程组(2.8) 适合如下边界条件的分片正则解 $w(z)=\begin{cases}w^+(z),\ z\in D^+,\\ w^-(z),\ z\in D^-,\end{cases}$ $w^-(\infty)=0$ 记作**问题 R**。

(2.10) $\quad w^+(z)=G(z)w^-(z)+g(z),\ z\in\Gamma,$

此处 $G(z)$、$g(z)$ 都是 Γ 上的超复变函数，即

$$G(z)=\sum_{k=0}^{r-1}e^kG_k(z),\ G_k(z)\neq0,\ g(z)=\sum_{k=0}^{r-1}e^kg_k(z),$$ 且满足条件

(2.11) $\quad C_\alpha[G_k(z),\Gamma]\leqslant l_0<\infty,C_\alpha[g_k(z),\Gamma]\leqslant l_0,$

这里 $\alpha(0<\alpha<1)$、l_0 都是实常数。并定义问题 R 的指数为

(2.12) $\quad K=\dfrac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg G(z)=\dfrac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg G_0(z)=\sum\limits_{j=0}^{N}K_j,$

其中 $K_j=\dfrac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_j}\arg G_0(z),\ j=0,\ 1,\cdots,N$。

设 z_j 是 D_j^- 内的固定点，$j=1,\cdots,N$，又

(2.13) $$\Pi(z)=\prod_{j=1}^{N}[t(z)-t(z_j)]^{k_j},$$

可以看出 $\prod_{j=1}^{N}(z-z_j)^{k_j}$ 是 $\Pi(z)$ 的复数部分，又 $[t(z)]^{-k}\Pi(z)G(z)$ 的复数部分为 $z^{-k}\prod_{j=1}^{N}(z-z_j)^{k_j}G_0(z)$，且 $\Delta_{\Gamma_j}z^{-k}\prod_{j=1}^{N}(z-z_j)^{k_j}G_0(z)=0$，$j=0,1,\cdots,N$，而 $\ln H(z)=\ln[t(z)]^{-k}\Pi(z)G(z)$ 在 Γ 上是单值 Hölder 连续的。我们可将（2.10）的齐次边界条件

(2.14) $$X^+(z)=G(z)X^-(z),\quad z\in\Gamma$$

改写成

(2.15) $$\begin{cases}\Pi(z)X^+(z)=H(z)[t(z)]^kX^-(z),\quad z\in\Gamma,\ \text{即}\\ \ln\Pi(z)X^+(z)-\ln[t(z)]^kX^-(z)=\ln H(z),\quad z\in\Gamma.\end{cases}$$

根据超解析函数的 Plemlj 公式（2.7），将 $\ln H(\zeta)$ 代替（2.3）式中的 $f(\zeta)$，便得

(2.16) $$X(z)=\begin{cases}X^+(z)=[\Pi(z)]^{-1}e^{\Psi(z)},\quad z\in D^+,\\ X^-(z)=[t(z)]^{-k}e^{\Psi(z)},\quad z\in D^-,\end{cases}$$

这里 $\Psi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{\ln H(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}dt(\zeta)$。

设 $y(z)=e^{\Psi(z)}$，又

(2.17) $$W(z)=\begin{cases}[X(z)]^{-1}w(z),\quad z\in D^+,\\ [y(z)]^{-1}w(z),\quad z\in D^-,\end{cases}$$

那么复方程组（2.8）转化为

(2.18) $$DW=AW+B^*\overline{W},$$

其中 $B^*(z)=\begin{cases}B(z)\overline{X(z)}/X(z), & z\in D^+,\\ B(z)\overline{Y(z)}/Y(z), & z\in D^-,\end{cases}$

又边界条件（2.10）转化为

(2.19) $W^+(z)-[t(z)]^K W^-(z)=h(z),\ z\in\Gamma,$

这里 $h(z)=g(z)/X^+(z)$。我们把边值问题(2.18)、(2.19) 记作问题 R^*。

现在分三种情况讨论：

1. 当指数 $K=0$。用 $\Omega_1(z,\ \zeta)$ 与 $\Omega_2(z,\ \zeta)$ 表示复方程组（2.18）的基本核，类似于（1.36）中所示，且它们具有性质（1.38），因此由 P.'e nli 公式（2.7），知

(2.20) $$W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,\ \zeta)h(\zeta)dt(\zeta)$$
$$+\Omega_2(z,\zeta)\ \overline{h(\zeta)dt(\zeta)}$$

是问题 R^* 的一个解。因为当 $h(z)=0$ $(z\in\Gamma)$ 时的齐次边值问题 R_0^*的解 $W(z)$在全平面 E 上连续，且 $W(\infty)=0$，根据定理1.5，知 $W(z)\equiv 0$，故(2.20) 中的 $W(z)$ 是问题 R^* 的通解。

2. 当 $K>0$。我们先要求出复方程组(2.18) 于 $D^\pm$内的分片正则解 $W_1(z)$，直到 Γ 连续，且满足条件

(2.21) $$\lim_{z\to\infty}[t(z)]^K W_1(z)=0.$$

事实上，设

(2.22) $$W_1(z)=\begin{cases}W(z), & z\in D^+,\\ [t(z)]^K W(z), & z\in D^-.\end{cases}$$

则求解上述问题 R^* 的解 $W(z)$就转化为求解如下边值问题 R_1^* 的解 $W_1(z)$。

(2.23) $$DW_1=AW_1+B_1^*\overline{W}_1,$$
$$B_1^*(z)=\begin{cases}B^*(z), & z\in D^+,\\ [t(z)/\overline{t(z)}]^K B^*(z), & z\in D,\end{cases}$$

(2.24) $\qquad W_1^+(z)-W_1^-(z)=h(z),\ z\in\Gamma.$

用 $\Omega_1^*(z,\ \zeta)$、$\Omega_2^*(z,\ \zeta)$ 表示复方程组 (2.23) 的基本核，则如 1，可知问题 R_1^* 具有形如下的解

$$(2.25)\quad W_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*(z,\ \zeta)h(\zeta)dt(\zeta)$$

$$-\Omega_2^*(z,\ \zeta)\ \overline{h(\zeta)dt(\zeta)}.$$

而

$$(2.26)\qquad W^*(z)=\begin{cases}W_1(z),\ z\in D^+,\\ [t(z)]^{-K}W_1(z),\ z\in D^-\end{cases}$$

是问题 R^* 的一特解.

余下要求出齐次问题 R_1^* 的通解. 这只要求出复方程组

$$(2.27)\qquad DW_1=AW_1+B_1^*\overline{[t(z)}/t(z)]^K\overline{W}_1$$

在全平面上的连续解 $F_k^*(z)$、$G_k^*(z)$，使得：当 $z\to\infty$ 时，$F_k^*(z)\to 1$，$G_k^*(z)\to i$，$k=0,\ 1,\cdots,\ K-1$，而

$$(2.28)\qquad F_k(z)=\begin{cases}[t(z)]^kF_k^*(z),\\ [t(z)]^{k-K}F_k^*(z),\end{cases}$$

$$G_k(z)=\begin{cases}[t(z)]^kG_k^*(z),\ z\in D^+,\\ [t(z)]^{k-K}G_k^*(z),\ z\in D^-\end{cases}$$

都是复方程组 (2.18) 之齐次问题 R_0^* 的解，且 $F_k(\infty)=0$，$G_k(\infty)=0$，于是 $\sum_{k=0}^{K-1}[C_kF_k(z)+d_kG_k(z)]$是齐次问题 R_0^*的通解，这里 C_k、$d_k(k=0,\cdots,K-1)$ 都是任意实常数. 而非齐次问题 R^* 的通解具有形式

$$(2.29)\quad W(z)=\sum_{k=0}^{K-1}[C_kF_k(z)+d_kG_k(z)]$$

$$
+\begin{cases} W_1(z), & z\in D^+, \\ [t(z)]^{-K}W_1(z), & z\in D^-. \end{cases}
$$

3. 当$K<0$。我们仍作形如（2.22）的函数变换，将求问题R^*的解$W(z)$转化为求问题R_1^*的解$W_1(z)$，但应使在点∞的邻域内有$W_1(z)=O(|z|^{K-1})$。我们考虑形如(2.25)的函数$W_1(z)$，它是复方程组（2.27）于$D^\pm$内的解，满足边界条件(2.24)，但不一定满足$W_1(z)=O(|z|^{K-1})$，为了使$W_1(z)$满足此条件，注意到（2.27）的未数A、B_1^*在点∞的邻域内等于0，则由(1.36)，有

$$
(2.30)\qquad \Omega_1^*(z,\ \zeta)=\frac{1}{t(\zeta)-t(z)},\quad \Omega_2^*(z,\ \zeta)=0,
$$

当$|z|$足够大，此时（2.25）成为

$$
(2.31)\quad W_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}[t(z)]^{-K-1}\cdot\frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma[t(\zeta)]^k h(\zeta)\,dt(\zeta).
$$

因此当以下条件成立时，问题R_1^*、问题R^*是可解的。

$$
(2.32)\qquad \int_\Gamma[t(\zeta)]^k h(\zeta)\,dt(\zeta)=0,\ k=0,\cdots,-K-1.
$$

通过上面的讨论，我们便得以下定理：

定理2.2 设一阶复方程组（2.8）满足条件（2.9），则其问题R的可解性如下：

(1) 当指数$K\geqslant0$，问题R具有如下形式的通解

$$
(2.33)\quad w(z)=\begin{cases} X(z)\left[\sum\limits_{k=0}^{K-1}(c_kF_k(z)+d_kG_k(z))+W_1(z)\right], \\ \qquad z\in D^+, \\ Y(z)\left[\sum\limits_{k=0}^{K-1}(c_kF_k(z)+d_kG_k(z)+\right. \\ \qquad (t(z))^{-K}W_1(z)], \quad z\in D^-, \end{cases}
$$

这里 c_k、$d_k(k=0,\cdots,K-1)$ 都是任意实常数，$F_k(z)$、$G_k(z)$、$W_1(z)$如（2.28）、（2.25）所示；

（2）当 $K<0$ 时，问题 R 有 $2|K|$个可解条件，如（2.32）式所示，当这些条件满足时，问题 R 的解 $w(z)$ 可表示成

$$(2.34)\qquad w(z)=\begin{cases}X(z)W_1(z), & z\in D^+,\\ Y(z)[t(z)]^{-K}W_1(z), & z\in D^-,\end{cases}$$

其中 $W_1(z)$如（2.25）式所示。

三、广义超解析函数的 Haseman 边值问题

现在我们考虑复方程组（2.8）更一般的 Haseman 边值问题 H，其边界条件为

$$(2.35)\quad w^+[\beta(z)]=G(z)w^-(z)+g(z),\ z\in\Gamma,\ w(\infty)=0,$$

这里 $G(z)$、$g(z)$ 满足条件（2.11），而 $\beta(z)$ 是将 Γ_j 保持方向，同胚映射到自身的函数，$j=0,1,\cdots,N$，且满足第三章（4.34），即 $\beta'(t)\neq0$，$\beta(t)\in C_\alpha^1(\Gamma)$，$0<\alpha<1$。

类似于第三章§4，使用满足边界条件

$$(2.36)\qquad \zeta^+[\beta(z)]=\zeta^-(z),\ z\in\Gamma,$$

在 D^+、D^- 上单叶亚纯的函数 $\zeta(z)$，$\zeta(\infty)=\infty$，$\zeta(z)$ 将 D^+、D^-分别映射到Δ^+、Δ^-，Δ^+、Δ^-互不相交，它们的边界都是 L，且 $\Delta^++\Delta^-+L=E$，以 $z(\zeta)$ 表示 $\zeta(z)$ 的反函数，记

$$(2.37)\qquad W(\zeta)=w[z(\zeta)],$$

在此变换下，复方程组（2.8）转化为

$$(2.38)\qquad \tilde{D}W=\tilde{A}(\zeta)W+\tilde{B}(\zeta)\overline{W},$$

这里 $\tilde{D}=(\ \ )_{\bar\zeta}-\tilde{Q}(\ \ )_\zeta$，$\tilde{Q}=Q[\overline{z'(\zeta)}/z'(\zeta)]$，$\tilde{A}=\overline{z'(\zeta)}\,A[z(\zeta)]$，$\tilde{B}=\overline{z'(\zeta)\,B[z(\zeta)]}$。又边界条件(2.35) 转化为

$$(2.39)\qquad W^+(\zeta)=\tilde{G}(\zeta)W^-(\zeta)+\tilde{g}(\zeta),\ \zeta\in L,$$

其中 $G(\zeta)\neq0$，$\tilde{G}(\zeta)$、$\tilde{g}(\zeta)\in C_\alpha(L)$。这样一来，只要求出复方

程组（2.38）适合边界条件（2.39）之 Riemann 边值问题 R 的解 $W(\zeta)$，$W(\infty)=0$，那么 $w(z)=W[\zeta(z)]$ 便是复方程组（2.8）适合边界条件（2.35）之问题 H 的解 $w(z), w(\infty)=0$。而问题 H 的可解性结果也可由关于（2.38）之上述问题 R 之可解性定理 2.2 推出

定理 2.3 对于复方程组（2.8）之问题 H，

（1）当指数 $K\geqslant 0$ 时，它在点∞等于 0 的解是存在的，其通解 $w(z)$ 包含有 $2K$ 个任意实常数；

（2）当 $K<0$，在 $2|K|$ 个实等式成立的条件下，此问题 H 是可解的。

四、广义超解析函数的 Riemann-Hilbert 边值问题

这里讨论的区域 D 是如前所述的 $N+1$ 连通区域。我们仍设一阶复方程组（2.8）在区域 D 上满足（2.9）中所示的条件，并把求（2.8）于 $\bar{D}$ 上的连续解 $w(z)$，满足如下边界条件的边值问题记作**问题** A。

$$\text{(2.40)} \qquad \operatorname{Re}[\overline{\lambda(z)}w(z)]=R(z), \quad z\in\Gamma,$$

这里 $\lambda(z)$、$R(z)$ 都是超复变函数，$\lambda(z)\neq 0, \lambda(z)$、$R(z)\in C_\alpha(\Gamma)$，$\frac{1}{2}<\alpha<1$。此边值问题的标数定义为

$$\text{(2.41)} \quad K=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg\lambda(z)=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg\lambda_0(z),$$

$\lambda_0(z)$ 为 $\lambda(z)$ 的复数部分。

为了讨论上述边值问题 A 的可解性，我们引入复方程组（2.8）适合如下变态边界条件之**问题** B。

$$\text{(2.42)} \qquad \operatorname{Re}[\overline{\lambda(z)}w(z)]=R(z)+h(z), \quad z\in\Gamma,$$

其中 $h(z)$ 具有如下形式

$$(2.43)\quad h(z)=\sum_{k=0}^{r-1}h_k(z)e^k,$$

$$h_k(z)=\begin{cases}0,\ z\in\Gamma,\ 当\ K\geqslant N,\\ \left.\begin{array}{l}h_{kj},z\in\Gamma_j,1\leqslant j\leqslant N-K\\ 0,\ z\in\Gamma_j,N-K<j\leqslant N+1\end{array}\right\}0\leqslant K<N,\\ \left.\begin{array}{l}h_{kj},\ z\in\Gamma_j,1\leqslant j\leqslant N,\\ h_{k0}+\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{-K-1}(H_{km}^{+}+iH_{km}^{-})z^m,\ z\in\Gamma_0\end{array}\right\}K<0,\end{cases}$$

这里 $\Gamma_0=\Gamma_{N+1}$，$h_0=h_{N+1}$，$h_{kj}(j=0,1,\cdots,N)$、$H^{\pm}_{km}(m=1,\cdots,-K-1,\ k=0,\ 1,\cdots,r-1)$ 都是待定实常数。

实际上，复方程组（2.8）与边界条件（2.42）之边值问题B可分解成如下一些边值问题的组合。

问题 B_0：$\begin{cases}w_{0\bar z}=A_{00}w_0+B_{00}\bar w_0,\quad z\in D,\\ \mathrm{Re}[\overline{\lambda_0(z)}w_0(z)]=R_0(z)+h_0(z),\quad z\in\Gamma;\end{cases}$

问题 B_1：$\begin{cases}w_{1\bar z}+Q_1w_{0\bar z}=A_{11}w_1+B_1\bar w_1+A_{10}w_0+B_{10}\bar w_0,\\ \mathrm{Re}[\overline{\lambda_0(z)}w_1(z)+\overline{\lambda_1(z)}w_0(z)]=R_1(z)+h_1(z),z\in\Gamma;\end{cases}$

……

问题 B_{r-1}：$\begin{cases}w_{r-1\bar z}+Q_1w_{r-2\bar z}+\cdots+Q_{r-1}w_{0\bar z}=A_{r-1,r-1}w_{r-1}\\ +B_{r-1,\ r-1}\overline{w_{r-1}}+\cdots+A_{r-1,0}w_0+B_{r-1,0}\bar w_0,\\ \mathrm{Re}[\overline{\lambda_0(z)}w_{r-1}(z)+\overline{\lambda_1(z)}w_{r-2}(z)+\cdots\\ +\overline{\lambda_{r-1}(z)}w_0(z)]=R_{r-1}(z)+h_{r-1}(z),\quad z\in\Gamma.\end{cases}$

依次求解上述各边值问题，便可证明边值问题B存在唯一解，进而可导出边值问题A的可解性结果。由于这里所述的边值问题是后两节相应边值问题的特殊情况，此处不作证明，只叙述结果。

定理 2.4 一阶复方程组(2.8)的问题B的解是存在唯一的。

(1) 当标数$K\geqslant N$，(2.8) 之问题A可解，其通解 $w(z)$ 包

含有$(2K-N+1)r$个任意实常数。

(2) 当$0\leqslant K<N$，上述问题A有$(N-K)r$个可解条件，此时通解$w(z)$包含有$(K+1)r$个任意实常数。

(3) 当$K<0$，问题A有$(-2K+N-1)r$个可解条件。

五、一类一阶椭圆型方程组的边值问题

这里将介绍稍广的一阶椭圆型方程组

$$Dw=Aw+B\bar{w}+F,\quad Dw=w_{\bar{z}}+Qw_z, \tag{2.44}$$

其中$w(z)=(w_1(z),\cdots,w_n(z))'$，$F(z)=(F_1(z),\cdots,F_n(z))'$，$A(z)=(A_{jk}(z))_{n\times n}$，$B(z)=(B_{jk}(z))_{n\times n}$，$Q(z)=(Q_{jk}(z))_{n\times n}$具有如下形式

$$Q(z)=\begin{pmatrix} q_1 & & & & & & 0 \\ \beta_1 & \ddots & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ \beta_1^{r_1} & \cdots & \beta_1 & q_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & q_p & \\ & & & & & \beta_p & \ddots \\ & & & & & \vdots & \ddots \quad \ddots \\ 0 & & & & & \beta_p^{r_p} & \cdots \ \beta_p \quad q_p \end{pmatrix},$$

这里r_s+1为正方矩阵$\begin{pmatrix} q_s & & & 0 \\ \beta_s & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \beta_s^{r_s} & \cdots & \beta_s & q_s \end{pmatrix}$的行数.设$A$、$B$和$Q$在点$\infty$的邻域内等于0，且在全平面$E$上广义微商$Q_{\bar{z}}$、$Q_z\in L_p$，$p>2$，又$q_j(z)$、$\beta_j(z)$ $(j=1,\cdots,p)$ $A_{jk}(z)$、$B_{jk}(z)$ $(j、k=1,\cdots,n)$都是复变函数，在E上属于L_p，而$|\beta_j(z)|\leqslant\beta_0$，$\beta_0$为适当小的常数，又

$$|q_j|\leqslant q_0<1,\quad j=1,\cdots,n,\ q_0=\text{常数}. \tag{2.45}$$

下面的结果是B.Bojarski在文[18]4)中得到的.这里仍设D是

如前所述的 $N+1$ 连通区域，记 $D^+=D$，$D^-=E\backslash\bar{D}^+$，并不妨考虑（2.44）的齐次方程组

$$Dw=Aw+B\bar{w}. \tag{2.46}$$

所谓（2.46）的 Riemann 边值问题即求（2.46）的分片正则解

$$w(z)=\begin{cases}w^+(z), & z\in D^+\\ w^-(z), & z\in D^-,\end{cases}$$ 使 $w^\pm(z)$ 分别在 $\overline{D^+}$、$\overline{D^-}$ 上连续，

$w(\infty)=0$，且满足边界条件

$$w^+(\tau)=G(\tau)w^-(\tau)+g(\tau),\quad \tau\in\Gamma, \tag{2.47}$$

这里 $g(\tau)$ 是在 Γ 上 Hölder 连续的复向量，$G(\tau)=(G_{jk}(\tau))_{n\times n}$，$G_{jk}$ 在 Γ 上 Hölder 连续，且满足

$$\det G(\tau)\neq 0,\quad \tau\in\Gamma. \tag{2.48}$$

以上边值问题记作**问题** R，而它的共轭**问题** R_0' 是指求复方程组

$$w_{\bar{z}}^*+(Q'w^*)_z=A'w^*+\overline{B'w^*} \tag{2.49}$$

在 D^+、D^- 上的分片正则解 $w^{*\pm}(z)$，$w^{*-}(\infty)=0$。$w^{*\pm}(z)$ 分别在 D^+、D^- 上连续，且满足边界条件

$$w^{*+}(\tau)=G^*(\tau)w^{*-}(\tau),\ G^*(\tau)=X^{-1}(\tau)G(\tau)'^{-1}X(\tau),\quad X(\tau)=Et'+Q'\bar{t}',\ \tau\in\Gamma, \tag{2.50}$$

仿照书[117]1)第三章中使用的方法，通过复方程组（2.46）解 $w(z)$ 的一种积分表示式以及 Q 一全纯向量 $\Phi(z)$ 关于实密度 $\mu(\tau)$ 的 Cauchy 型积分表示式

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma V(\tau,\ z)\ (Ed\tau+Qd(\bar{\tau})\mu(\tau)+ic, \tag{2.51}$$

这里 $V(\tau,z)$ 是复方程组（2.46）的 Cauchy 核，C 是常向量，可将边值问题 R 转化为相应的奇异积分方程组. 然后使用复方程组（2.46）满足边界条件

$$w^+(\tau)-w^-(\tau)=\mu(t),\quad \tau\in\Gamma,\quad w^-(\infty)=0 \tag{2.52}$$

之边值问题可解的充要条件为

(2.53) $\operatorname{Im}\int_\Gamma(w_k^*,(d\tau+Qd\bar\tau)\mu(\tau))=0,\ k=1,\cdots,m,$

其中 $w_k^*(z)$ 是共轭复方程 (2.49) 之相应齐次问题的线性无关解组。于是可得以下结果：

定理 2.5 复方程组 (2.46) 之问题 R 可解的充要条件是

(2.54) $\operatorname{Im}\int_\Gamma(g(\tau),(Ed\tau+Q'd\bar\tau)w_k^*)=0,$

其中$w_k^*(z)$ ($k=1,\ 2,\cdots,l_R'$)是共轭问题 R_0' 的全部线性无关解。又问题 R 的齐次问题 R_0 的线性无关解数 l_R 与共轭问题 R_0' 的线性无关解数 l_R' 都是有限的，并且满足关系式

(2.55) $2K_R=l_R-l_R',$

其中 $K_R=\dfrac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg\det G(t)$ 是问题 R、问题 R_0 的标数。

下面考虑复方程组(2.46)在 $N+1$ 连通区域 D 上的 Riemann-Hilbert边值问题。这种边值问题是要求出(2.46) 于 D 内的正则解 $w(z)$，使它直到边界 Γ 连续，且满足边界条件

(2.56) $\operatorname{Re}[\overline{G(\tau)}w(\tau)]=f(\tau),\tau\in\Gamma,$

此处$G(\tau)$ 如 (2.47)、(2.48) 中所述，$f(\tau)$ 是 Γ 上的已知实向量，$G(\tau)$、$f(\tau)$ 均在 Γ 上 Hölder 连续。以上边值问题记作**问题** A。

而共轭**问题** A_0' 是求复方程组(2.49)于 D 内的正则解$w^*(z)$，使它直到Γ 连续，且满足边界条件

(2.57) $\operatorname{Re}[G'^{-1}(\tau)(t'E+Q'\overline{t'})w^*(\tau)]=0,\ \tau\in\Gamma.$

使用 (2.46) 之解的积分表示式及奇异积分方程组的理论，可得关于问题 A 的如下可解性结果。

定理 2.6 复方程组 (2.46) 之问题 A 可解的充要条件为

(2.58) $\operatorname{Im}\int_\Gamma(G^{-1}f,(Ed\tau+Q'd(\bar\tau)w_k^*)=0,$

其中 $w_k^*(z)$ ($k=1,\cdots,l_A'$) 是共轭问题 A_0' 的线性无关解的完全

组，又问题A的齐次问题A_0的线性无关解数l_A与共轭问题A_0'的线性无关解数l_A'都是有限的，且满足关系式

$$(2.59)\qquad l_A - l_A' = 2K - n(N-1).$$

这里$K = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg\det G(t)$是问题$A$、问题$A_0$的标数，$N+1$是区域$D$的连通数。

§3　多个未知函数椭圆型方程组的复形式

本节中，我们先将较一般的一阶线性与非线性椭圆型实方程组化为复形式的方程组即复方程组，还把某些条件下的二阶线性与非线性椭圆型实方程组化为二阶复方程组，然后再叙述加于这些复方程组的一些条件，这在后面的§4、§5中将使用到。应当提及本节中所述的一阶复方程组包含前两节中讨论的广义超解析函数所满足的复方程组作为特殊情形

一、把一阶椭圆型方程组化为复形式

这里及以后不妨设D是第三章§5中所述的$N+1$连通圆界区域。先考虑D上的$2m$个未知函数的一阶线性椭圆型方程组

$$(3.1)\qquad \Psi_j = \sum_{k=1}^{2m}[a_{jk}(x,y)u_{kx} + b_{jk}(x,y)u_{ky} + C_{jk}(x,y)u_k] + d_j(x,y) = 0,$$

$$j = 1,\cdots,2m,$$

这里所说的椭圆型条件，即对任意的实数λ，以下代数式恒成立

$$(3.2)\qquad |A + B\lambda| > 0,\quad (x,y)\in D,$$

其中

$$A=(a_{jk})_{2m\times 2m}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{12m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{2m1} & \cdots & a_{2m2m}\end{pmatrix}=(\Psi_{ju_{kx}})_{2m\times 2m},$$

$$B=(\Psi_{ju_{ky}})_{2m\times 2m}$$

(实际上，椭圆型条件的定义是：$|A+B\lambda|\neq 0$。如果对 D 内某一点 z，$|A+B\lambda|<0$，我们只要将方程组（3.1）乘以 -1，记所得新方程组的系数矩阵为 A^*,B^*，那就有 $|A^*+B^*\lambda|>0$)。而(3.1)在 D 上的一致椭圆型条件为系数 $a_{jk}(x,\ y)$、$b_{jk}(x,\ y)$ $(j,\ k=1,\cdots,2m)$ 在 D 上有界，且

(3.3) $\qquad |A+B\lambda|>0,\ |A|\geqslant\delta>0,\quad (x,y)\in D,$

其中 δ 为一正常数。我们作如下自变量的线性变换

(3.4) $\qquad \xi=x+ty,\ \mu=x-ty,\ t>0,$

这里 t 是适当小的正常数，而

(3.5) $\qquad u_{kx}=u_{k\xi}+u_{k\eta},\ u_{ky}=t[u_{k\xi}-u_{k\eta}],$

于是有

(3.6) $\quad \Psi_{ju_{k\xi}}=\Psi_{ju_{kx}}+t\Psi_{ju_{ky}},\ \Psi_{ju_{k\eta}}=\Psi_{ju_{kx}}-t\Psi_{ju_{ky}}.$

设

(3.7) $\qquad \zeta=\xi+i_\eta,\ w_k=u_k+iu_{k+m},\ k=1,\cdots,m,$

则

$$(3.8)\quad \begin{cases} u_{k\xi}=\dfrac{1}{2}[w_{k\bar\zeta}+w_{k\zeta}+\bar w_{k\zeta}+\bar w_{k\bar\zeta}],\\ u_{k+m\xi}=\dfrac{i}{2}[-w_{k\bar\zeta}-w_{k\zeta}+\bar w_{k\zeta}+\bar w_{k\bar\zeta}],\\ u_{k\eta}=\dfrac{i}{2}[-w_{k\bar\zeta}+w_{k\zeta}+\bar w_{k\zeta}-\bar w_{k\bar\zeta}],\\ u_{k+m\eta}=\dfrac{1}{2}[-w_{k\bar\zeta}+w_{k\zeta}-\bar w_{k\zeta}+\bar w_{k\bar\zeta}],\quad 1\leqslant k\leqslant m,\end{cases}$$

因而有

$$(3.9)\quad \begin{cases} \Psi_{jw_{k\bar{\zeta}}} = \frac{1}{2}[\Psi_{ju_{k\xi}} - i\Psi_{ju_{k+m\xi}} - i\Psi_{ju_{k\eta}} - \Psi_{ju_{k+m\eta}}] = \\ = \frac{1}{2}[(1-i)\Psi_{ju_{kx}} - (1+i)\Psi_{ju_{k+mx}} \\ \quad + (1-i)t\Psi_{ju_{k+my}} + (1+i)t\Psi_{ju_{ky}}] \\ \qquad j = 1, \cdots, 2m. \end{cases}$$

这样一来，在区域 D 内有

$$(3.10)\quad J(\zeta) = \frac{D(\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_{2m-1}, \Psi_{2m})}{D(w_{1\bar{\zeta}}, \bar{w}_{1\zeta}, \cdots, w_{m\bar{\zeta}}, \bar{w}_{m\zeta})} =$$

$$= \begin{vmatrix} \Psi_1 w_{1\bar{\zeta}} & \Psi_1 \bar{w}_{1\zeta} & \cdots & \Psi_1 w_{m\bar{\zeta}} & \Psi_1 \bar{w}_{m\zeta} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \Psi_{2m} w_{1\bar{\zeta}} & \Psi_{2m} \bar{w}_{1\zeta} & \cdots & \Psi_{2m} \bar{w}_{m\bar{\zeta}} & \Psi_{2m} \bar{w}_{m\bar{\zeta}} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^m \begin{vmatrix} \Psi_{1u_{1x}} - \Psi_{1u_{1+mx}} + t\Psi_{1u_{1+my}} + t\Psi_{1u_{1y}}, \\ \ddots \\ \Psi_{2mu_{1x}} + \Psi_{2mu_{1+mx}} + t\Psi_{2mu_{1+my}} + t\Psi_{2mu_{1y}}, \cdots \\ \Psi_{1u_{1x}} - \Psi_{1u_{1+mx}} + t\Psi_{1u_{1+my}} - t\Psi_{1u_{1y}}, \\ \ddots \\ \Psi_{2mu_{1x}} + \Psi_{2mu_{1+mx}} + t\Psi_{2mu_{1+my}} + t\Psi_{2mu_{1y}}, \cdots \\ \cdots \Psi_{1u_{mx}} - \Psi_{1u_{2mx}} + t\Psi_{1u_{2my}} + t\Psi_{1u_{my}}, \\ \ddots \\ \cdots \Psi_{2mu_{mx}} - \Psi_{2mu_{2mx}} + t\Psi_{2mu_{2my}} + t\Psi_{2mu_{1my}}, \\ \Psi_{1u_{mx}} + \Psi_{1u_{2mx}} + t\Psi_{1u2_{my}} - t\Psi_{1u_{my}} \\ \ddots \\ \Psi_{2mu_{mx}} + \Psi_{2mu_{2mx}} + t\Psi_{2mu_{2my}} - t\Psi_{2mu_{my}} \end{vmatrix} =$$

$$= i^m(|A| + t|C|),$$

其中 A 如 (3.2) 式中所示。如果 (3.1) 的系数 $a_{jk}(x,y)$, $b_{jk}(x,y)$, $c_{jk}(x,y)$, $d_j(x,y)$ $(j,k=1,\cdots,2m)$ 在闭区域 $\bar{D}$ 上连续，那么只要选取常数 t 适当小就可使 $|tc|<\delta$，当 $(x, y)\in D$，故有

$$(3.11)\qquad |J(\zeta)| = |i^m|A| + t|C|| \geqslant |A| - t|C| > 0,$$

于是可从方程组 (3.1) 解出 $w_{\bar{\zeta}} = (w_{1\bar{\zeta}}, \cdots, w_{m\bar{\zeta}})'$，而得复形式的方程组

$$(3.12)\qquad w_{k\bar{\zeta}} = F_k(\zeta, w_1, \cdots, w_m, w_{1\zeta}, \cdots, w_{m\zeta}) =$$

$$= Q_k^{(1)} w_\zeta + Q_k^{(2)} \overline{w}_\zeta + A_k^{(1)} w_{\bar{z}} + A_k^{(2)} \overline{w} + A_k^{(3)}, \quad k=1,\cdots,m,$$

其中 $Q_k^{(j)} = (Q_{k1}^{(j)}, \cdots, Q_{km}^{(j)})'$, $A_k^{(j)} = (A_{k1}^{(j)}, \cdots, A_{km}^{(j)})'$, $j=1, 2$, $w=(w_1,\cdots,w_m)'$, $w_\zeta = (w_{1\zeta},\cdots,w_{m\zeta})'$,

并记 $Q^{(j)} = (Q_{kl}^{(j)}(\zeta))_{m\times m}, A^{(j)} = (A_{kl}^{(j)}(\zeta))_{m\times m}$, $j=1,2$,

$$A^{(3)} = (A_1^{(3)}(\zeta), \cdots, A_m^{(3)}(\zeta))',$$

则复方程组 (3.12) 可写成矩阵的形式

$$w_{\bar{z}} = F(z, w, w_z), \tag{3.13}$$

$$F = Q^{(1)} w_z + Q^{(2)} \overline{w}_{\bar{z}} + A^{(1)} w + A^{(2)} \overline{w} + A^{(3)},$$

其中 $F=(F_1,\cdots,F_m)'$, $w_z = (w_{1z},\cdots, w_{mz})'$，这也是线性复方程组。

其次考虑区域 D 上的 $2m$ 个未知实函数的一阶非线性椭圆型方程组

$$\Psi_j(x, y, u_1,\cdots,u_{2m}, u_{1x},\cdots,u_{2mx}, u_{1y},\cdots,u_{2my}) = 0, \quad j=1,\cdots,2m, \tag{3.14}$$

我们设 $\Psi_j(x, y, u_1,\cdots,u_{6m})$ $(j=1,\cdots,2m)$ 对 $(x,y)\in D$ 及任意的实数 $u_1,\cdots,u_{6m}$ 均连续，且对 $u_{2m+1}\cdots, u_{6m}$ 具有一阶连续偏微商。方程组 (3.14) 在 D 上的椭圆型条件是 (3.2) 式成立，其中

$$A = (\Psi_{ju_{kx}})_{2m\times 2m}, \quad B = (\Psi_{ju_{ky}})_{2m\times 2m},$$

而 (3.14) 在 D 上的一致椭圆型条件是 $\Psi_{ju_{kx}}$、$\Psi_{ju_{ky}}$ $(j, k=1,\cdots,2m)$ 有界，且 (3.3) 式成立。设 $z=x+iy, w_k = u_k + iu_{k+m}$, $k=1,\cdots,m$，如果在 D 内每一点 z，有

$$J(z) = \frac{D(\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_{2m-1}, \Psi_{2m})}{D(w_{1\bar{z}}, \overline{w}_{1z}, \cdots, w_{m\bar{z}}, \overline{w}_{mz})} \tag{3.15}$$

$$= \frac{1}{2^{2m}} \begin{vmatrix} \Psi_{1u_{1x}} - i\Psi_{1u_{1+mx}} - i\Psi_{1u_{1y}} - \Psi_{1u_{1+my}} \cdots & \cdots \Psi_{1u_{mx}} + i\Psi_{1u_{2mx}} + i\Psi_{1u_{my}} - \Psi_{1u_{2my}} \\ \vdots & \ddots \\ \Psi_{2mu_{1x}} - i\Psi_{2mu_{1+mx}} - i\Psi_{2mu_{1y}} - \Psi_{2mu_{1+my}} \cdots & \cdots \Psi_{2mu_{mx}} + i\Psi_{2mu_{2mx}} + i\Psi_{2mu_{my}} - \Psi_{2mu_{2my}} \end{vmatrix} =$$

$$=\left(\frac{i}{2}\right)^m(|A+D|)\neq 0,$$

其中

$$D=\begin{pmatrix} -\Psi_{1u_{1+my}} & \Psi_{1u_{1y}} & \cdots & -\Psi_{1u_{2my}} & \Psi_{1u_{my}} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -\Psi_{2mu_{1+my}} & \Psi_{2mu_{1y}} & \cdots & -\Psi_{2mu_{2my}} & \Psi_{2mu_{my}} \end{pmatrix}$$

那么可从（3.14）解出 $w_{\bar{z}}=(w_{1\bar{z}},\cdots,w_{m\bar{z}})'$，而得如下复形式的方程组

（3.16） $w_{k\bar{z}}=F_k(z,w_1,\cdots,w_m,w_{1z},\cdots,w_{mz})$，$k=1,\cdots,m$，

其矩阵形式如（3.13）所示。

如果作线性变换（3.4），并且（3.11）式成立，那么我们也可将非线性方程组（3.14）化为形如（3.12）或（3.13）的非线性复方程组。

二、把二阶椭圆型方程组化为复形式

我们先考虑区域 D 上的 m 个未知实函数的二阶非线性椭圆型方程组

（3.17） $\Phi_j(x,y,u_1\cdots,u_m,u_{1x},\cdots,u_{mx},u_{1y}\cdots,u_{my},u_{1xx},$
$\cdots,u_{mxx},u_{1xy},\cdots,u_{mxy},u_{1yy},\cdots,u_{myy})=0,j=1,\cdots,m,$

其中 $\Phi_j(x,y,u_1,\cdots,u_{6m})$（$j=1,\cdots,m$）对 $(x,y)\in D$ 及任意的实数 $u_1,\cdots,u_{6m}$ 均连续，且对 $u_{3m+1},\cdots,u_{6m}$ 具有一阶连续偏微商。方程组（3.17）在 D 上的椭圆型条件是：对于任意的实数 λ，以下代数式恒成立。

（3.18） $$|A+2B\lambda+C\lambda^2|>0,\quad (x,y)\in D,$$

这里

$$A=(\Phi_{ju_{kxx}})_{m\times m},\quad 2B=(\Phi_{ju_{kxy}})_{m\times m},\quad C=(\Phi_{ju_{kyy}})_{m\times m}$$

而（3.17）在 D 上的一致椭圆型条件是

（3.19） $$|A+2B\lambda+C\lambda^2|>0,\ |A|\geqslant\delta>0,\ (x,\ y)\in D,$$

此处 δ 为一正常数，又 $\Phi_{ju_{kxx}}$、$\Phi_{ju_{kxy}}$、$\Phi_{ju_{kyy}}(j,k=1,\cdots,m)$在

D 内有界. 如果对 D 内任一点 z, 有

$$(3.20)\quad J(z)=\frac{D(\Phi_1,\cdots,\Phi_m)}{D(u_{1z\bar z},\vdots,u_{mz\bar z})}=\begin{vmatrix}\Phi_{1u_1z\bar z} & \cdots & \Phi_{1u_{mz\bar z}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \Phi_{mu_1z\bar z} & \cdots & \Phi_{mu_{mz\bar z}}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}2(\Phi_{1u_{1xx}}+\Phi_{1u_{1yy}}) & \cdots & 2(\Phi_{1u_{mxx}}+\Phi_{1u_{myy}})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 2(\Phi_{mu_{1xx}}+\Phi_{mu_{1yy}}) & \cdots & 2(\Phi_{mu_{mxx}}+\Phi_{mu_{myy}})\end{vmatrix}$$

$$=2^m|A+C|\neq 0,$$

那么能从方程组 (3.17) 解出 $u_{kz\bar z}$ $(k=1,\cdots,m)$, 而得复形式的方程组, 即如下的复方程组

$$(3.21)\quad u_{kz\bar z}=F_k(z,u_1,\cdots,u_m,\ u_{1z},\cdots,u_{mz},\ u_{1zz},\cdots,u_{mzz}),$$

记 $u=(u_1,\cdots,u_m)'$, $F=(F_1,\cdots,F_m)'$, 则 (3.21) 可写成矩阵的形式

$$(3.22)\qquad u_{z\bar z}=F(z,\ u,\ u_z,\ u_{zz}).$$

如果二阶方程组 (3.17) 满足条件

$$(3.23)\quad \sup_{1\leqslant j,k\leqslant m}(|\Phi_{ju_{kxx}}|,|\Phi_{ju_{kxy}}|,|\Phi_{ju_{kyy}}|)\leqslant\delta^{-1},\ |A|\geqslant\delta>0,$$

这里 δ 是正常数, 那么仿[128]31) 第一章定理2.2, 通过线性变换 (3.4), 可将 (3.17) 转化为形如下的复方程组

$$(3.24)\qquad u_{\zeta\bar\zeta}=F(\zeta,\ u,\ u_\zeta,\ u_{\zeta\zeta}).$$

当应提及这里的 m 可以不是偶数. 如果 m 是偶数, 那么如一阶那样, 当方程组 (3.17) 满足一定的条件, 可将 (3.17) 转化为 $\frac{m}{2}$ 个未知复变函数的二阶复方程组.

如果二阶椭圆型方程组 (3.17) 是线性的, 即

$$(3.25)\quad \Phi_j=\sum_{k=1}^{m}[a_{jk}(x,\ y)u_{kxx}+b_{jk}(x,\ y)\ u_{kxy}+C_{jk}(x,y)u_{kyy}$$

$$+d_{jk}(x,y)u_{kx}+e_{jk}(x,\ y)u_{ky}+f_{jk}(x,y)\ u_k]+g_j(x,\ y)$$

$$=0,\ \ j=1,\cdots,m,$$

又系数 $a_{jk}(x,y)$，$b_{jk}(x,y)$，$c_{jk}(x,y)$，$d_{jk}(x,y)$，$e_{jk}(x,y)$，$f_{jk}(x,y)$，$g_j(x,y)$（j、$k=1,\cdots,m$）在 $\bar{D}$ 上连续，且条件(3.23)成立，即有

$$(3.26)\quad \begin{cases} \sup\limits_{1\leqslant j,\ k\leqslant m}(|a_{jk}(x,y)|,|b_{jk}(x,y)|,|c_{jk}(x,y)|)\leqslant\delta^{-1}, \\ |A|=\begin{vmatrix} a_{11}(x,y) & \cdots & a_{1m}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(x,y) & \cdots & a_{mm}(x,y) \end{vmatrix}\geqslant\delta>0, \end{cases}$$

那么通过线性变换（3.4），所转化成的复方程组（3.24）也是线性的，可写成如下形式

$$(3.27)\qquad u_{\zeta\bar{\zeta}}=F(\zeta,\ u,\ u_\zeta,\ u_{\zeta\zeta}),$$

$$F=\mathrm{Re}[Q(\zeta)u_{\zeta\zeta}+A^{(1)}(\zeta)u_\zeta+A^{(2)}(\zeta)u(\zeta)+A^{(3)}(\zeta)],$$

这里

$$Q(\zeta)=(Q_{kl}(\zeta))_{m\times m};\quad A^{(j)}(\zeta)=(A_{kl}^{(j)}(\zeta))_{m\times m},\quad j=1,\ 2,$$

$$A^{(3)}=(A_1^{(3)}(\zeta),\cdots,A_m^{(3)}(\zeta))'.$$

三、加于椭圆型复方程组的一些条件

先考虑一阶椭圆型复方程组（3.13），我们可将它写成如下形式

$$(3.28)\qquad w_{\bar{z}}=F(z,\ w,\ w_z),\quad F=Q^{(1)}w_z+Q^{(2)}\bar{w}_{\bar{z}}$$

$$+A^{(1)}w+A^{(2)}\bar{w}+A^{(3)},$$

其中

$$Q^{(j)}=(Q_{kl}^{(j)})_{m\times m},\quad Q_{kl}^{(j)}=Q_{kl}^{(j)}(z,\ w,\ w_z),\quad A^{(j)}=(A_{kl}^{(j)})_{m\times m},$$

$$A_{kl}^{(j)}=A_{kl}^{(j)}(z,\ w),\quad j=1,2,A_k^{(3)}=A_k^{(3)}(z,\ w),\quad k,\ l=1,\cdots,m.$$

假定复方程组（3.28）满足条件 C，即

(1) $Q_{kl}^{(j)}(z,\ w,\ V)$、$A_{kl}^{(j)}(z,\ w)$ 在区域 D 外等于 0，又对闭区域 $\bar{D}$ 上任意的连续函数向量 $w(z)$ 与可测函数向量 $V(z)\in L_{p_0}(\bar{D})$，在 D 上可测，且满足条件

$$(3.29)\quad \begin{cases} L_p[A_{kl}^{(j)}(z,\ w(z)),\ \bar{D}]\leqslant d_{kl}^{(j)}\leqslant k_0<\infty,\ j=1,\ 2, \\ L_p[A_k^{(3)}(z,w(z),\bar{D}]\leqslant k_0, k、l=1,\cdots,m,\ 2<p_0<p<\infty; \end{cases}$$

(2) 上述函数对几乎所有的 $z\in D$, $V\in E^m$ 关于 $w\in E^m$ 连续;

(3) 复方程组 (3.28) 在 D 上满足如下的一致椭圆型条件，即对任意两个复数向量 $V^{(j)}=(V_1^{(j)},\ \cdots,\ V_m^{(j)})$, $j=1,\ 2$ 在 D 内几乎处处有

$$(3.30)\quad |F_k(z,\ w,V^{(1)})-F_k(z,\ w,\ V^{(2)})|\leqslant\sum_{l=1}^{m}q_{kl}|V_l^{(1)}-V_l^{(2)}|,$$

$$k=1,\ \cdots,m,$$

其中

$$(3.31)\qquad \sum_{l=1}^{m}q_{kl}=q_k<1,\ 1\leqslant k\leqslant m,$$

$$(3.32)\qquad q_{kl}<\varepsilon,\ d_{kl}^{(j)}<\varepsilon,\ 1\leqslant k<l\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant 2,$$

这里 ε 是足够小的正常数。

如果条件 (3.31)、(3.32) 改为

$$(3.33)\quad \sum_{l=1}^{m}q_{kl}=q_k<\frac{1}{m},\ d_{kl}^{(j)}\leqslant k_0,\ 1\leqslant k、l\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant 2,$$

这样的条件 C 称为**条件 C^***。

不难看出，前两节讨论的都是线性椭圆型复方程组的情形，且假定 (3.28) 中的 $Q^{(1)}=0$, $Q^{(2)}$ 的对角线上面各元素均为 0，并且还有其它一些条件。

其次考虑二阶椭圆型复方程组 (3.22)、(3.24) 及 (3.27)。我们可将这些二阶复方程组写成如下形式

$$(3.34)\quad u_{z\bar{z}}=F(z,\ u,\ u_z,\ u_{zz}),\ F=\mathrm{Re}[Qu_{zz}+A^{(1)}u_z +A^{(2)}u+A^{(3)}],$$

其中

$$Q=(Q_{kl})_{m\times m},\ Q_{kl}=Q_{kl}(z,\ u,\ u_z,\ u_{zz}),$$

$$A^{(j)}=(A_{kl}^{(j)})_{m\times m},\ A_{kl}^{(j)}=A_{kl}^{(j)}(z,\ u,\ u_z),\ j=1,\ 2,$$

$$A^{(3)}=(A_1^{(3)},\cdots,A_m^{(3)})',\ A_{kl}^{(3)}=A_{kl}^{(3)}(z,\ u,\ u_z),$$

$$k、l=1,\cdots,m.$$

并假定（3.34）满足条件 C，即

（1）$Q_{kl}(z,\ u,\ u_z,\ V)$、$A_{kk}^{(j)}(z,u,u_z)(j=1,2)$、$A_k^{(3)}(z,\ u,\ u_z)$ 在区域 D 外等于 0，又对闭区域 $\bar{D}$ 上任意的连续可微函数向量 $u(z)$ 与可测函数向量 $V(z)\in L_{p_0}(\bar{D})$ 在 D 上可测，且满足条件

$$(3.35)\begin{cases}L_p[A_{kl}^{(j)}(z,\ u,\ u_z),\ \bar{D}]\leqslant d_{pl}^{(j)}\leqslant k_0<\infty, j=1,\ 2,\\ L_p[A_k^{(3)}(z,\ u,\ u_z,\ \bar{D}]\leqslant k_0, k、l=1,\cdots,m, 2<p_0<p<\infty;\end{cases}$$

（2）上述函数对几乎所有的 $z\in D$，$V\in E^m$ 关于 $u\in R^m$、$u_z\in E^m$ 连续；

（3）复方程组（3.34）在 D 上满足如下的一致椭圆型条件，即对任意两个复数向量 $V^{(j)}=(V_1^{(j)},\cdots,V_m^{(j)})'$，$j=1,\ 2$ 在 D 内几乎处处有

$$(3.36)\quad |F_k(z,\ u,\ u_z,V^{(1)})-F_k(z,\ u,\ u_z,\ V^{(2)})|$$

$$\leqslant\sum_{l=1}^{m}q_{kl}|V_{kl}^{(1)}-V_l^{(2)}|,\ k=1,\cdots,m,$$

其中

$$(3.37)\qquad \sum_{l=1}^{m}q_{kl}=q_k<1,\ 1\leqslant k\leqslant m,$$

$$(3.38)\quad q_{kl}<\varepsilon,\ d_{kl}^{(1)}<\varepsilon,\ 1\leqslant k<l\leqslant m,\ d_{kl}^{(2)}<\varepsilon,\ 1\leqslant k、l\leqslant m,$$

这里 ε 是足够小的正常数。

如果条件（3.37）、（3.38）改为

$$(3.39)\quad \sum_{l=1}^{m}q_{kl}=q_k<\frac{1}{m},\ d_{kl}^{(j)}<k_0,\ 1\leqslant k、l\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant 2,$$

这样的条件 C 称为**条件 C^***。

§4　一阶椭圆型复方程组的边值问题

本节中，先讨论一阶线性椭圆型复方程组的变态 Dirichlet 问题，然后讨论一阶非线性椭圆型复方程组的 Riemann-Hilbert 边值问题。

一、一阶线性复方程组的变态 Dirichlet 问题

我们将一阶线性椭圆型复方程组（3.13）改写成

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} &w_{\bar z}-Q^{(1)}w_z-Q^{(2)}\overline{w}_{\bar z}=\varepsilon f(z,\ w)+A^{(3)},\\ &f(z,\ w)=A^{(1)}w+A^{(2)}\overline{w}, \end{aligned}$$

其中 $Q^{(j)}=(Q_{kl}^{(j)}(z))_{m\times m}$，$A^{(j)}=(A_{kl}^{(j)}(z))_{m\times m}$，$j=1,\ 2$，$A^{(3)}=(A_1^{(3)}(z),\ \cdots,\ A_m^{(3)}(z))'$，$\varepsilon(-\infty<\varepsilon<\infty)$ 为实参数，并设（4.1）的系数 $Q^{(j)}$、$A^{(j)}$ 满足条件 C^*。所谓复方程组（4.1）在 $N+1$ 连通区域 D 上的变态 Dirichlet 问题即求（4.1）在 $\bar D$ 上的连续解 $w(z)=(w_1(z),\cdots,w_m(z))'$，使它满足边界条件

$$(4.2)\qquad \mathrm{Re}w(t)=r(t)+h(t),\ \ t\in\Gamma,$$

这里 $r(t)=(r_1(t),\cdots,r_m(t))'$，$C_\alpha[r_k(t),\Gamma]\leqslant l_0<\infty$，$\frac{1}{2}<\alpha<1$，

$h(t)=(h(t),\cdots,\ h_m(t))'$，$h_k(t)=\begin{cases}h_{k0},t\in\Gamma_0,\\0,\ \ t\in\Gamma-\Gamma_0,\end{cases}$ $h_{k0}(k=1,\cdots,m)$ 都是待定实常数，我们把复方程组（4.1）的上述边值问题记作**问题 D**。

由书[128]31）第二章 §2，我们可将（4.23）之问题 D 的解 $w(z)$ 表示成

$$(4.3)\ w(z)=\Phi(z)+\tilde T\omega=(\Phi_1(z),\cdots,\Phi_m(z))'+(\tilde T\omega_1,\cdots,\tilde T\omega_m)',$$

此处 $\Phi(z)$ 是解析函数向量之问题 D 的解，且可要求 $\mathrm{Im}\Phi(1)=$

$b=(b_1,\cdots,b_m)',b_k(k=1,\cdots,m)$ 都是任意实常数，又

$$(4.4)\quad T\omega_k=-\frac{1}{\pi}\iint_D[P(z,\ \zeta)\omega_k(\zeta)+Q(z,\zeta)\overline{\omega_k(\zeta)}]d\sigma_\zeta,$$

其中 $\omega_k(z)=w_{k\bar z}\in L_{p_0}(\bar D)$，$p_0(2<p_0<p)$ 是一正常数，而

$$(4.5)\begin{cases}P(z,\ \zeta)=\dfrac{1}{2}[G_1(z,\ \zeta)+G_2(z,\ \zeta)+H_1(z,\ \zeta)\\ \qquad -H_2(z,\ \zeta)],\ z\in D,\\ Q(z,\ \zeta)=\dfrac{1}{2}[G_1(z,\ \zeta)-G_2(z,\ \zeta)+H_1(z,\ \zeta)\\ \qquad +H_2(z,\ \zeta)],\ \zeta\in D,\\ G_1(z,\zeta)=\dfrac{1}{\zeta-z}+\sum\limits_{j=0}^{N}g_j(z,\ \zeta),\\ G_2(z,\zeta)=\dfrac{1}{\zeta-z}-\sum\limits_{j=0}^{N}g_j(z,\ \zeta),\\ g_k(z,\ \zeta)=\dfrac{z-z_j}{\gamma_j^2-(\overline{\zeta-z_j})(z-z_j)},\ j=0,\ 1,\ \cdots,N,\end{cases}$$

又 $H(z,\ \zeta)$、$H_2(z,\ \zeta)$ 是适合如下边界条件的两个解析函数。

$$(4.6)\begin{cases}\mathrm{Re}H_1(t,\ \zeta)-\mathrm{Re}h_j(t,\ \zeta)+h(t),t\in\Gamma_j,j=0,1,\cdots,N,\\ \mathrm{Im}H_1(1,\ \zeta)=-\mathrm{Im}h_0(1,\ \zeta),\ h_j(t,\ \zeta)=\sum\limits_{\substack{m=0\\ m\neq j}}^{N}g_m(t,\zeta),\end{cases}$$

$$(4.7)\begin{cases}\mathrm{Re}iH_2(t,\zeta)=-\mathrm{Re}ih_j(t,\zeta)+h(t),t\in\Gamma_j,j=0,1,\cdots,N,\\ \mathrm{Im}iH_2(1,\zeta)=-\mathrm{Im}ih_0(1,\zeta).\end{cases}$$

并且 $s\omega=(\tilde T\omega)_z$ 具有性质：对于 (3.33) 中所述的常数 q_k，可选取足够接近 2 的正数 $p_0\left(2<p_0<min\left(p,\dfrac{1}{1-\alpha}\right)\right)$ 使得

$$(4.8)\quad \Lambda_{p_0}\sum_{k=1}^{m}q_k<1,\quad \Lambda_{p_0}=\sup_{\omega(z)\in L_{p_0}(\bar D)}\frac{L_{p_0}(s\omega_k,\ \bar D)}{L_{p_0}(\omega_k,\ \bar D)},$$

并且 $\Phi(z)$、$\tilde{T}\omega$ 满足

$$(4.9)\quad C_\beta[\Phi,\bar{D}]=\sum_{k=1}^{m}C_\beta[\Phi_k,\bar{D}]\leqslant M_1,\ L_{p_0}[\Phi',\bar{D}]\leqslant M_2,$$

$$C_\beta[\tilde{T}\omega,\bar{D}]\leqslant M_3L_{p_0}[\omega,\bar{D}],$$

这里 $\beta=\min\left(\alpha,1-\dfrac{2}{p_0}\right)$, $M_j=M_j(p_0,\alpha,l_0,b,D)$, $j=1,2$, $M_3=M_3(p_0,\ \alpha,\ l_0,\ D)$。

为了讨论复方程组(4.1)之问题 D 的可解性，将问题 D 形如 (4.3) 的解 $w(z)$ 代入 (4.1)，得到关于 $\omega=(\omega_1(z),\cdots,\omega_m(z))'$ 的非齐次积分方程组

$$(4.10)\quad \begin{cases}\omega(z)-Q^{(1)}s\omega-Q^{(2)}\overline{s\omega}=\varepsilon f(z,\tilde{T}\omega)+A(z,\varepsilon),\\ A(z,\varepsilon)=\varepsilon f(z,\ \Phi+\tilde{T}\omega)+A^{(3)}+Q^{(1)}(\Phi'+s\omega)\\ \qquad +Q^{(2)}\overline{(\Phi'+s\omega)}.\end{cases}$$

由 (4.9) 可推知 $A(z,\varepsilon)\in L_{p_0}(\bar{D})$，且 (4.10) 的左边具有逆算子 I，因而可得与 (4.10) 等价的积分方程组

$$(4.11)\qquad \omega(z)=\varepsilon If(z,\tilde{T}\omega)+IA(z,\varepsilon).$$

由于 $\tilde{T}$ 是将 $L_{p_0}(\bar{D})$ 映射到 $C(\bar{D})$ 上的线性有界的完全连续算子，故逆算子 I 也是完全连续的，因此可将积分方程组的 Fredholm 定理应用于 (4.11) 以

$$(4.12)\qquad \varepsilon_j(j=1,2,\cdots):\ 0<|\varepsilon_1|\leqslant|\varepsilon_2|\leqslant\cdots\leqslant|\varepsilon_n|\leqslant\cdots$$

表示齐次积分方程组

$$(4.13)\qquad \omega(z)-\varepsilon If(z,\tilde{T}\omega)=0$$

的离散特征值，则当 $\varepsilon\neq\varepsilon_j$ 时，非齐次方程组 (4.11) 有解 $\omega(z)\in L_{p_0}(\bar{D})$，因而一阶线性复方程组 (4.1) 具有形如 (4.3) 的解 $\omega(z)$，它包含有 m 个任意实常数 $b_k(k==1,\cdots,m)$。

其次，设 ε 是齐次积分方程组 (4.13) 秩为 q 的特征值，于是根据 Fredholm 第三定理，可写出 q 个代数方程表示的可解条

件。由于（4.11）中的 $IA(z,\varepsilon)$ 含有 m 个任意实常数 $b_k(k=1,\cdots,m)$，以 s 表示 $b_k(k=1,\cdots,m)$ 的系数矩阵的秩，易知 $s\leqslant \text{mim}(q,m)$，那么可从 m 个任意实常数中确定 s 个，也就确定了 q 个代数方程中的 s 个等式成立。但要使复方程组（4.1）之问题 D 可解，还必须使另外 $q-s$ 个等式成立，这样便知（4.1）之问题 D 有 $q-s$ 个可解条件，而在此条件下问题 D 之通解 $w(z)$ 包含有 $m+q-s$ 线性无关解。我们可将上述结果写成定理。

定理 4.1 设一阶线性复方程组（4.1）满足条件 C^*。(1) 若 ε 不是相应问题 D 之齐次积分方程组（4.13）的离散特征值，则（4.1）之问题 D 具有形如（4.13）的解，其通解 $w(z)$ 包含有 m 个任意实常数；

(2) 若 ε 是相应齐次积分方程组（4.13）的秩为 q 的特征值，则（4.1）之问题 D 有 $q-s$ 个可解条件，当这些条件满足时，其通解 $w(z)$ 包含有 $m+q-s$ 个线性无关解，$s\leqslant \text{mim}(q,m)$。

二、一阶非线性复方程组的 Riemann-Hilbert 问题的提法与解的估计

所谓一阶非线性椭圆型复方程组（3.13）在 $N+1$ 连通区域 D 上的 Riemann-Hilbert 边值问题（**问题 A**），即求（3.13）于 $\bar{D}$ 上的连续解 $w(z)=(w_1(z),\cdots,w_m(z))'$，使它满足边界条件

$$(4.14)\qquad \text{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)]=r(t),\quad t\in\Gamma,$$

其中

$$(4.15)\quad \lambda(t)=(\lambda_{kl}(t))_{m\times m},r(t)=(r_1(t),\cdots,r_m(t))',$$

并设 $\det\lambda(t)\neq 0$，不妨设 $|\lambda_{kk}(t)|=1$，$t\in\Gamma$，$k=1,\cdots,m$，又设

$$(4.16)\ \begin{cases}C_\alpha[\lambda_{kj}(t),\Gamma]\leqslant l_{kj}\leqslant l_0,1\leqslant k、j\leqslant m; l_{kj}\leqslant\varepsilon,\ 1\leqslant k<j\leqslant m,\\ C_\alpha[r_k(t),\ \Gamma]\leqslant l_0,\ \ 1\leqslant k\leqslant m,\end{cases}$$

这里 $\alpha\left(\frac{1}{2}<\alpha<1\right)$、$l_0$ 都是实常数，ε 是如前所述的适当小的正

常数。记 $K_k=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg\lambda_{kk}(t)$，而 $K=(K_1\cdots,K_m)'$ 称为问题 A 的标数。

在 §2 中所述问题 A 的边界条件中矩阵 $\lambda(t)$ 的对角线上面各元素均为 0，还满足其它条件。为了使用解的先验估计方法与 Lerag-Schauder 定理得出问题 A 的可解性结果，我们引入变态的边值问题 B，即将边界条件（4.14）改成

$$\text{(4.17)}\qquad \operatorname{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)]=r(t)+h(t),\ t\in\Gamma,$$

其中

$$\text{(4.18)}\quad h(t)=\begin{pmatrix}h_1(t)\\ \vdots\\ h_m(t)\end{pmatrix},$$

$$h_k(t)=\begin{cases}0,\ t\in\Gamma,\ \text{当 } K_k\geqslant N,\\ \left.\begin{array}{l}h_{kj},t\in\Gamma_j,j=1,\cdots,N-K_k\\ 0,\ t\in\Gamma_j,j=N-K_k+1,\cdots,N+1\end{array}\right\}0\leqslant K_k<N,\\ \left.\begin{array}{l}h_{kj},\ t\in\Gamma_j,\ j=1,\ \cdots,\ N\\ h_{k_0}+\operatorname{Re}\sum\limits_{m=1}^{-K_k-1}(H_{km}^{+}+iH_{km}^{-})t^m\end{array}\right\}\begin{array}{l}K_k\leqslant 0,\\ 1\leqslant k\leqslant m,\end{array}\end{cases}$$

这里 $h_{kj}(j=0,1,\cdots,N)$、$H_{km}^{\pm}(m=1,\cdots,|K_k|-1,\ k=1,\ \cdots,m)$ 都是待定实常数。当 $K_k\geqslant 0$，还要求解 $w(z)$ 满足如下点型条件

$$\text{(4.19)}\quad \begin{cases}\operatorname{Im}[\overline{\lambda(a_j)}w(a_j)]=b_j=(b_{j1},\cdots,b_{jm})',\\ j\in\{j\}=\begin{cases}1,\cdots,2K_k-N+1,\ K_k\geqslant N,\\ N-K_k+1,\cdots,N+1,0\leqslant K_k<N,\end{cases}\end{cases}\quad k=1,\cdots,m,$$

其中 a_j 是 Γ_j 上的点，$j=1,\cdots,N,a_j(j=N+1,\cdots,2K_k-N+1)$ 是 Γ_0 上不同的点，$b_{jk}(k=1,\cdots,m)$ 都是实常数满足 $|b_{jk}|\leqslant l_0$。

现在我们给出边值问题 B 解的估计式：

定理 4.2 设一阶复方程组（3.13）满足条件 C，且(3.38)、(4.16) 中的正数 ε 适当小，又若将(3.35)中 $L_p[A_k^{(3)},\ \bar{D}]\leqslant k_0$,

(4.16) 中的$C_\alpha[r_k, \Gamma]\leqslant l_0$和 (4.19) 中的$|b_{jk}|\leqslant l_0$分别代以$L_p[A_k^{(3)}, \bar{D}]\leqslant k_1$, $C_\alpha[r_k, \Gamma]\leqslant l_1$和$|b_{jk}|\leqslant l_1(j=1,\cdots,2K_k-N+1, k=1,\cdots,m)$, 则 (3.13) 之问题$B$的解$w(z)$满足估计式

$$(4.20)\quad s=C_\beta[w,\ \bar{D}]+L_{p_0}[|w_{\bar{z}}|+|w_z|,\ \bar{D}]=\sum_{k=1}^{m}[C_\beta(w_k,\ \bar{D})$$

$$+L_{p_0}(|w_{k\bar{z}}|+|w_{kz}|,\bar{D}]\leqslant(k_1+l_1)M_4,$$

其中$\beta=\min(1-2/p_0,\ \alpha)$, $M_4=M_4(q_0,\ p_0,\ k_0,\ \alpha,\ l_0, D,\ \varepsilon)$, $q_0=(q_1,\cdots,q_m)'$, 特别当$k_1=k_0$, $l_1=l_0$, 则有估计式

$$(4.21)\quad s\leqslant(k_0+l_0)M_4=M_5=M_5(q_0,\ p_0,\ k_0,\ \alpha,\ l_0,\ D,\ \varepsilon).$$

证 先讨论k_1、l_1至少有一不为0. 以$w(z)$表示 (3.13) 之问题B的解, 则$W(z)=w(z)/(k_1+l_1)$之各分量$W_k(z)$满足

$$(4.22)\quad W_{k\bar{z}}=\sum_{l=1}^{m}[Q_{kl}^{(1)}W_{lz}+Q_{kl}^{(2)}\overline{W}_{l\bar{z}}+A_{kl}^{(1)}W_l+A_{kl}^{(2)}\overline{W}_l]+$$

$$+A_k^{(3)}/(k_1+l_1)$$

也可写成

$$(4.23)\quad \begin{cases} W_{k\bar{z}}-Q_{kk}^{(1)}W_{kz}-Q_{kk}^{(2)}\overline{W}_{k\bar{z}}=A_{kk}^{(1)}W_k+A_{kk}^{(2)}\overline{W}_k+A_k, \\ A_k=A_k^{(3)}/(k_1+l_1)+\sum_{l\neq k}[Q_{kl}^{(1)}W_{lz}+Q_{kl}^{(2)}\overline{W}_{l\bar{z}}+A_{kl}^{(1)}W_l+ \\ \qquad A_{kl}^{(2)}\overline{W}_l],\ k=1,\cdots,m, \end{cases}$$

还满足边界条件

$$(4.24)\quad \mathrm{Re}[\overline{\lambda_k(t)}W_k(t)]=R_k(t)+h_k(t),$$

$$R_k(t)=r(t)/(k_1+l_1)-\sum_{l\neq k}\mathrm{Re}[\overline{\lambda_l(t)}W(t)],\quad t\in\Gamma,$$

$$(4.25)\quad \mathrm{Im}[\overline{\lambda_k(a_j)}W_k(a_j)]=B_{kj}$$

$$=b_{kj}-\sum_{l\neq k}\mathrm{Im}[\overline{\lambda_l(a_j)}W_l(a_j)],\quad j\in\{j\}, k=1,\cdots,m.$$

先考虑$W(z)$的第一个分量$W_1(z)$, 由条件C可知: 当

$2\leqslant l\leqslant m$，有

$$|Q_{1l}|=|Q_{1l}^{(1)}+Q_{1l}^{(2)}\overline{W}_l/W_l|\leqslant q_{1l}<\varepsilon,$$
$$L_{p_0}[A_{1l}^{(1)},\bar{D}]+L_{p_0}[A_{1l}^{(2)},\ \bar{D}]\leqslant d_{1l}<2\varepsilon,$$

因而得

$$(4.26)\ L_{p_0}(A_1,\bar{D})\leqslant L_{p_0}(A_1^{(3)}/(k_1+l_1),\bar{D})+\sum_{l=2}^{m}\{q_{1l}L_{p_0}(W_{l\bar{z}},\bar{D})$$
$$+[L_{p_0}(A_{1l}^{(1)},\ \bar{D})+L_{p_0}(A_{1l}^{(2)},\ \bar{D})]C(W_l,\ \bar{D})\}\leqslant 1$$
$$+3\varepsilon[L_{p_0}(W_{\bar{z}},\ \bar{D})+C_\beta(W,\ \bar{D})]\leqslant 1+3\varepsilon S=k_1',$$

根据书[128]31）第二章§2，第五章§1关于解析函数在D上之问题B解的积分表示式及Pompieu公式，可证

$$(4.27)\qquad w(z)\in C_\beta(\bar{D})\cap W^1_{p_0}(D),$$

由此可推得（4.24）式中的$R_k(t)$与（4.25）中的B_{kj}满足

$$(4.28)\ C_\beta(R_1,\ \Gamma)\leqslant C_\beta[r_1/(k_1+l_1),\Gamma]+\sum_{l=2}^{m}C_\beta(\lambda_{1l},\Gamma)C_\beta(W_l,$$
$$\bar{D})\leqslant 1+\varepsilon C_\beta(W,\ \bar{D})\leqslant 1+\varepsilon S=l_1',$$

$$(4.29)\ |B_{1j}|\leqslant|b_{1j}/(k_1+l_1)|+\sum_{l=2}^{m}C_\beta(\lambda_{1l},\Gamma)C_\beta(W_l,\bar{D})\leqslant 1+\varepsilon S$$
$$=l_1'.$$

令$W_1^*=W_1/(l_1'+k_1')$，则函数$W_1^*(z)$是一阶复方程

$$(4.30)\qquad W_{1\bar{z}}^*-Q_{11}^{(1)}W_{1z}^*-Q_{11}^{(2)}\overline{W}_{1\bar{z}}^*=A_{11}^{(1)}W_1^*+A_{11}^{(2)}\overline{W}_1^*$$
$$+A_1/(l_1+k_1)$$

满足以下边界条件之 Riemann-Hilbert 问题之解。

$$(4.31)\ \ \mathrm{Re}[\overline{\lambda_1(t)}W_1^*(t)]=R_1(t)/(l_1'+k_1')+h_1(t)\in\Gamma,$$
$$(4.32)\ \mathrm{Im}[\overline{\lambda_1(a_j)}W_1^*(a_j)]=B_{1j}/(l_1'+k_1'),\ \ j\in\{j\}.$$

注：在（4.26）、（4.28）中，不妨仍设$L_{p_0}[A_k^{(3)},\ \bar{D}]\leqslant k_1$，$C_\beta[r_k,\ \Gamma]\leqslant l_1$，$k=1,\ \cdots m$。

其中

$L_{p_0}[A_1/(l_1'+k_1),\ \bar{D}]\leqslant 1,\ C_\beta[R_1/(l_1+k_1),\Gamma]\leqslant 1,$

$|B_{1j}/(l_1+k_1)|\leqslant 1,$

因此仿[128]31）第五章§5中的证法，可证

$C_\beta[W_1^*,\ \bar{D}]+L_{p_0}[|W_{1\bar{z}}^*|+|W_{1z}^*|,\ \bar{D}]\leqslant M_6=M_6(q_0,\ p_0,\ k_0,\ \alpha,\ l_0,\ D),$

即

$$(4.33)\quad S_1=C_\beta[W_1,\ \bar{D}]+L_{p_0}[|W_{1\bar{z}}|+|W_{1z}|,\ \bar{D}]\leqslant(l_1'+k_1)M_6^* \\ =(2+4\varepsilon S)M_6.$$

其次考虑当 $k=2$ 时的（4.23）-（4.25）。因为

$$L_{p_0}[A_2,\ \bar{D}]\leqslant L_{p_0}[A_2^{(3)}/(k_1+l_1),\ \bar{D}]+\sum_{l\neq 2}\{q_{2l}L_{p_0}(W_{l\bar{z}},\ \bar{D})$$

$$+[L_{p_0}(A_{2l}^{(1)},\ \bar{D})\ +L_{p_0}(A_{2l}^{(2)},\ \bar{D})]C(W_l,\ \bar{D})\}\leqslant 1$$

$$+L_{p_0}(W_{1\bar{z}},\ \bar{D})+2\varepsilon\sum_{l=3}^{m}L_{p_0}(W_{l\bar{z}},\ \bar{D})+2k_0C(W_1,\ \bar{D})$$

$$+2\varepsilon\sum_{l=3}^{m}C(W_l,\ \bar{D})=1+(1+2k_0)S_1+2\varepsilon S\leqslant 1+2(1+2k_0)M_6$$

$$+2\varepsilon[1+2(1+2k_0)M_6]S=k_2+\varepsilon N_2S=k_2',$$

又

$$C_\beta(R_2,\ \Gamma)\leqslant C_\beta(r_2/(k_1+l_1),\Gamma]+\sum_{l\neq 2}C_\beta(\lambda_{2l},\ \Gamma)\,C_\beta(W_l,\ \bar{D})$$

$$\leqslant 1+l_0S_1+\varepsilon S\leqslant 1+2l_0M_6+\varepsilon(1+4l_0M_6)S=l_2+\varepsilon N_2'S=l_2',$$

$$|B_{2j}|\leqslant|b_{2j}|+\sum_{l\neq 2}C_\beta(\lambda_{2l},\ \Gamma)\ \ C_\beta(w_l,\ \bar{D})\leqslant l_2+\varepsilon N_2'S=l_2'.$$

类似于（4.33），我们有

$$(4.34)\quad S_2=C_\beta[W_2,\ \bar{D}]+L_{p_0}[|W_{2\bar{z}}|+|W_{2z}|),\bar{D}] \\ \leqslant(k_2'+l_2')M_6\leqslant[l_2+k_2+\varepsilon(N_2+N_2')S]M_6.$$

依此类推，可证：对 $2<k\leqslant m$，有

$$(4.35)\quad S_k=C_\beta[W_k,\ \bar{D}]+L_{p_0}[|W_{k\bar{z}}|+|W_{kz}|,\ \bar{D}]\leqslant(l_k'+k_k')M_6 \leqslant[l_k+k_k+\varepsilon(N_k+N_k')S]M_6.$$

联合 (4.33)－(4.35)，便得

$$(4.36)\qquad S=\sum_{k=1}^{m}S_k\leqslant M_7+\varepsilon M_8 S,$$

这里 $M_j=M_j(q_0,\ p_0,\ k_0,\ \alpha,\ l_0,\ D)$，$j=7,8$。选取正数 ε 足够小，使得 $1-\varepsilon M_8>0$，则得

$$(4.37)\qquad S\leqslant M_7/(1-\varepsilon M_8)=M_4.$$

由上式即知 (4.20) 式成立。如果 $k_1=l_1=0$，此时 (4.20) 式成为 $s=0$。事实上，此时 (4.20) 式取 $k_1=l_1=\delta>0$ 也成立，让 $\delta\to 0$，即得 $s=0$。

特别当 $k_1=k_0$，$l_1=l_0$，便有 (4.21) 式。

三、一阶非线性复方程组 Riemann-Hilbert 问题的可解性

我们先证明解析函数向量之问题 B 的可解性。

引理 4.1 对于解析函数向量即对于 $F=0$ 时之 (3.13) 的解，当 (4.16) 中的正数 ε 足够小，则其问题 B 的解是存在唯一的。

证 考虑比边界条件 (4.17) 与 (4.19) 更广的边界条件

$$(4.38)\quad \operatorname{Re}[\overline{\Lambda(z)}\,w(z)]+\tau\operatorname{Re}[\overline{\Delta(z)}\,w(z)]=R(z)+h(z),\quad z\in\Gamma,$$

$$(4.39)\quad \operatorname{Im}[\overline{\Lambda(a_j)}\,w(a_j)]+\tau\operatorname{Im}[\overline{\Delta(a_j)}\,w(a_j)]=B_j,\quad j\in\{j\},$$

这里 $\Lambda(z)=(\Lambda_{kl}(z))_{m\times m}$；$\Lambda_{kl}(z)=\lambda_{kl}(z),k\geqslant l$；$\Lambda_{kl}(z)=0$，$k<l$；$\Delta(z)=(\Delta_{kl}(z))_{m\times m}$，$\Delta_{kl}(z)=0,k\geqslant l$；$\Delta_{kl}(z)=\lambda_{kl}(z),k<l$；$\tau\in[0,1]$是实参数，$R(z)\in C_\alpha(\Gamma)$，$0<\alpha<1$，$B_j$ 为实常数向量。当 $\tau=0$，依次使用书[128]31) 第二章、第五章中关于解析函数之

问题B解的存在唯一性，可知此时解析函数向量之边值问题（4.38）、（4.39）（简称问题B_*）存在唯一解．下面证明：如果对于$\tau=\tau_0(0\leqslant\tau_0<1)$，解析函数向量之问题$B_*$可解，那么存在一个与$\tau_0$无关的正数$\delta$，当$|\tau-\tau_0|\leqslant\delta$，且$0\leqslant\tau\leqslant1$时，问题$B_*$均可解．我们将（4.38）、（4.39）改写成

$$\text{(4.40)}\quad \operatorname{Re}[\overline{\Lambda(z)}w(z)]+\tau_0\operatorname{Re}[\overline{\Delta(z)}w(z)]$$
$$=(\tau_0-\tau)\operatorname{Re}[\overline{\Delta(z)}w(z)]+R(z)+h(z),\ z\in\Gamma,$$

$$\text{(4.41)}\quad \operatorname{Im}[\overline{\Lambda(a_j)}w(a_j)]+\tau_0\operatorname{Im}[\overline{\Delta(a_j)}w(a_j)]$$
$$=(\tau_0-\tau)\operatorname{Im}[\overline{\Delta(a_j)}w(a_j)]+B_j,j\in\{j\}.$$

将零向量$w_0(z)=0$代入以上两式等号右边w的位置，因$\tau=\tau_0$时上述问题B_*可解，记此解为$w_1(z)$，易知$w_1(z)\in C_\alpha(\bar{D})$．将此解$w_1(z)$代入（4.40）、（4.41）等式之右边$w$的位置，又可求得上述问题$B_*$的解$w_2(z)$．依此类推，可求得解析函数向量序列$\{w_n(z)\}$，满足如下边界条件

$$\text{(4.42)}\quad \operatorname{Re}[\overline{\Lambda(z)}w_{n+1}(z)]+\tau_0\operatorname{Re}[\overline{\Delta(z)}w_{n+1}(z)]$$
$$=(\tau_0-\tau)\operatorname{Re}[\overline{\Delta(z)}w_nz)]+R(z)+h(z),\ z\in\Gamma,$$

$$\text{(4.43)}\quad \operatorname{Im}[\overline{\Lambda(a_j)}w_{n+1}(a_j)]+\tau_0\operatorname{Im}[\overline{\Delta(a_j)}w_{n+1}(a_j)]$$
$$=(\tau_0-\tau)\operatorname{Im}[\overline{\Delta(a_j)}w_n(a_j)]+B_j,\ j\in\{j\}.$$

由以上两式，可得

$$\text{(4.44)}\quad \operatorname{Re}[\overline{\Lambda(z)}(w_{n+1}(z)-w_n(z)]+\tau_0\operatorname{Re}[\overline{\Delta(z)}(w_{n+1}(z)$$
$$-w_n(z))]=(\tau_0-\tau)\operatorname{Re}[\overline{\Delta(z)}(w_n(z)-w_{n-1}(z))]$$
$$+h(z),\ z\in\Gamma,$$

$$\text{(4.45)}\quad \operatorname{Im}[\overline{\Lambda(a_j)}(w_{n+1}(a_j)-w_n(a_j))]+\tau_0\operatorname{Im}[\overline{\Delta(a_j)}(w_{n+1}(a_j)$$
$$-w(a_j))]=(\tau_0-\tau)\operatorname{Im}[\overline{\Delta(a_j)}(w_n(a_j)$$
$$-w_{n-1}(a_j))],\ j\in\{j\}.$$

仿定理4.2中的证法，我们有

$$C_\alpha[w_{n+1}(z)-w_n(z),\ \bar{D}]\leqslant|\tau_0-\tau|M_4l_0C_\alpha[w_n(z)-w_{n-1}(z),\ \bar{D}],$$

这里 M_4 是（4.20）式中的常数。仿照第三章定理 5.3 的证法，可证：存在足够小的正数 δ，当 $|\tau-\tau_0|\leqslant\delta$，$0\leqslant\tau\leqslant 1$ 时，解析函数向量之问题 B_* 存在着解 $w(z)$。于是，从 $\tau=0$ 可依次推出 $\tau=\delta,\cdots,\left[\frac{1}{\delta}\right]\delta$，1 时解析函数向量之问题 B_* 均可解。特别当 $\tau=1$，$R(z)=r(z)$ $(z\in\Gamma)$，$B_j=b_j(j\in\{j\})$，上述问题 B_* 是可解的，这就证明了解析函数向量之问题 B 存在着解，而解的唯一性可由定理 4.2 推出。

现在，我们考虑（3.13）的系数 $Q_{kl}^{(j)}=0$，$A_{kl}^{(j)}=0$，$j=1,2$，$1\leqslant k<l\leqslant m$ 的特殊情形，并记这样的复方程组为

$$(4.46)\qquad w_{\bar z}=\tilde F(z,\ w,\ w_z).$$

引理 4.2 设一阶非线性复方程组（4.46）满足条件 C，又（3.32）、（4.16）中的正数 ε 足够小，则（4.46）之问题 B 存在着解。

证 记 $D_n=\left\{z|z\in D,\ d(z,\Gamma)>\frac{1}{n},\ n\text{ 为正整数}\right\}$，并先证明一阶复方程组

$$(4.47)\quad w_{\bar z}=F^{(n)}\ (z,w,w_z),\quad F^{(n)}=\begin{cases}\tilde F(z,\ w,\ w_z),\ z\in D_n,\\ 0,\ z\in D-D_n\end{cases}$$

之问题 B 的可解性。（4.47）问题 B 的解 $w(z)$ 可表示成

$$(4.48)\qquad w(z)=\Phi(z)+T\omega,\ \ T\omega=T\omega_1+\cdots+T\omega_m,$$

这里 $\omega(z)=F^{(n)}=(\omega_1(z),\ \cdots,\ \omega_m(z))'$，$\Phi(z)=(\Phi_1(z),\ \cdots,\ \Phi_m(z))'$ 是 D 内的解析函数向量。将（4.48）代入（4.47）得积分方程组

$$(4.49)\quad \omega(z)=F^{(n)}(z,\ w(z),\ \Phi'(z)+\Pi\omega),\Pi\omega=(T\omega)_z,$$

如果我们能证明（4.49）具有解 $\omega(z)\in L_{p_0}(\bar D)\,(2<p_0<p)$，使得 $w(z)=\Phi(z)+T\omega$ 满足边界条件（4.17）与（4.19）那么 $w(z)$ 就是（4.47）之问题 B 的解。为此，我们引入 Banach 空间 $B=$

$L_{p_0}(\bar{D})$，又用 B_M 表示 B 中满足下列条件的函数组 $\omega(z)=(\omega_1(z),\cdots,\omega_m(z))'$ 的全体，即 $\omega_k(z)$ $(k=1,\cdots,m)$ 均在 D 可测，在 D^n 外等于 0，且范数

(4.50) $\qquad L_{p_0}[\omega(z),\ \bar{D}]<M=M_5+1,$

此处 M_5 是 (4.21) 中的常数，易知 B_M 是 Banach 空间 B 中的一有界开集，又以 $\overline{B_M}$ 表示 B_M 的闭包。

任取可测函数组 $\omega(z)\in B$，则知 $T\omega\in C_\beta(\bar{D})$，$\Pi\omega\in L_{p_0}(\bar{D})$，然后求适合边界条件

(4.51) $\quad \mathrm{Re}\{\overline{\lambda(t)}[\Phi(t)+T\omega]\}=r(t)+h(t),\ \ t\in\Gamma,$

(4.52) $\quad \mathrm{Im}\{\overline{\lambda(t)}[\Phi(t)+T\omega]\}_{t=a_j}=b_j,\ \ j\in\{j\}$

之解析函数向量之问题 B 的解 $\Phi(z)$，由引理 4.1，知此解 $\Phi(z)$ 是存在唯一的。将 $w(z)=\Phi(z)+T\omega$、$\Phi'(z)$ 代入积分方程组 (4.49) 中适当的位置，并考虑带有参数 $\tau(0\leqslant\tau\leqslant1)$ 的积分方程组

(4.53) $\quad \Omega_k(z)=\tau F_k^{(2)}(z,\ w,\Phi'+\tilde{\Pi}\Omega),\ \ k=1,\cdots,m,$

其中 $\tilde{\Pi}\Omega=(\Pi\Omega_1,\cdots,\Pi\Omega_k,\ \Pi\omega_{k+1},\cdots,\Pi\omega_m)'$。由条件 C，并根据压缩映射原理，此积分方程组 (4.53) 具有唯一解 $\Omega(z)=(\Omega_1(z),\cdots,\ \Omega_m(z))'\in B$，记从 $\omega(z)$ 到 $\Omega(z)$ 的映射为 $\Omega(z)=g[\omega(z),\ \tau]$，$0\leqslant\tau\leqslant1$。记 $B_0=B_M\times[0,\ 1]$，下面验证 $\Omega=g(\omega,\tau)$ $(0\leqslant\tau\leqslant1)$ 满足 Leray-Schauder 定理中的三个条件：

1) 对每一个 $\tau\in[0,\ 1]$，$g(\omega,\ \tau)$ 将 B 连续映射到自身，又在闭集 $\overline{B_M}$ 上是完全连续的，并对任意的 $\omega(z)\in B_M$ 关于 $\tau\in[0,\ 1]$ 一致连续。

为了证明 $\Omega=g(\omega,\ \tau)$ 的完全连续性。任取函数组序列 $\omega^{(j)}(z)\in\overline{B_M}$ $(j=1,2,\cdots)$，则有 $\Omega^{(j)}=g(\omega^{(j)},\ \tau)$，$j=1,2,\cdots$。由定理 4.2，可推知 $T\omega^{(j)}$、$\Phi^{(j)}(z)$ 满足估计式

$$
\begin{aligned}
(4.54)\qquad & C_\beta[\Phi^{(j)}(z),\ \bar{D}]\leqslant M_9,\ C_\beta[T\omega^{(j)},\bar{D}]\leqslant M_{10},\\
& L_{p_0}[\omega^{(j)}(z),\bar{D}]\leqslant M_{11},
\end{aligned}
$$

这里$M_j=M_j(q_0, p_0, k_0, \alpha, l_0, D, M)$，$j=9, 10, 11$。因此能从$\{\Phi^{(j)}(z)\}$、$\{\Phi^{(j)\prime}(z)\}$、$\{T\omega^{(j)}\}$选取子序列不妨设原序列在$D_n$上一致收敛到$\Phi^{(0)}(z)$、$\Phi^{(0)\prime}(z)$、$\Psi^{(0)}(z)$，记$w^{(0)}(z)=\Phi^{(0)}(z)+\Psi^{(0)}(z)$。以$\Omega^{(0)}(z)$表示积分方程组

(4.55) $\Omega_k^{(0)}(z)=\tau F_k^{(n)}(z, w^{(0)}, \Phi^{(0)\prime}+\tilde{\Pi}\Omega^{(0)})$，$k=1, \cdots, m$

的解。将对应于$\Omega^{(j)}=g[\omega^{(j)}, \tau]$与以上积分方程组相减，得

(4.56) $\Omega_k^{(j)}-\Omega_k^{(0)}=\tau[F_k^{(n)}(z, \omega^{(j)}, \Phi^{(j)\prime}+\tilde{\Pi}\Omega^{(j)})-F_k^{(n)}(z, w^{(j)},$

$\Phi^{(j)\prime}+\tilde{\Pi}\Omega^{(0)})+C_k^{(j)}(z)]$，$k=1,\cdots,m$，

其中$C_k^{(j)}(z)F_k^{(n)}(z, \omega^{(j)}, \Phi^{(j)\prime}+\tilde{\Pi}\Omega^{(0)})-F_k^{(n)}(z, w^{(0)}, \Phi^{(0)\prime}+\tilde{\Pi}\Omega^{(0)})$，注意$F_k^{(n)}$在$D_n$外等于0和条件$C$，并仿[128]31)第四章定理3.1的证法，使用Minkowski不等式和Hölder不等式，可证$L_{p_0}[C_k^{(j)}(z), \bar{D}]\to 0$，当$j\to\infty$，并由定理4.2中的估计式，可推知：当$j\to\infty$时，$L_{p_0}[\Omega^{(j)}-\Omega^{(0)}, \bar{D}]\to 0$。这表明$\Omega(z)=g[\omega(z), \tau]$对每一个$\tau\in[0, 1]$在$\overline{B_M}$上是完全连续的。同理，也可证明$\Omega(z)=g[\omega(z), \tau]$将$B$连续映射到自身，即能证：对$\omega^{(j)}(z)\in B(j=0, 1, 2, \cdots)$，且当$j\to\infty$时，$L_{p_0}[\omega^{(j)}(z)-\omega^{(0)}(z), \bar{D}]\to 0$，则当$j\to\infty$时，$L_{p_0}[\Omega^{(j)}(z)-\Omega^{(0)}(z), \bar{D}]\to 0$，其中$\Omega^{(j)}(z)=g[\omega^{(j)}(z), \tau]$，$\tau\in[0, 1]$，$j=0, 1, 2, \cdots$。

此外，对任一向量$\omega(z)\in\overline{B_M}$，有相应的$w(z)=\Phi(z)+T\omega$及$\Omega^{(j)}(z)=g[\omega(z), \tau_j]$，$j=1, 2$，即

$\Omega^{(j)}(z)=\tau_j F^{(n)}(z, w(z), \Phi'(z)+\Pi\Omega^{(j)})$，$\tau_j\in[0, 1]$，$j=1, 2$，

将以上两式相减，得

$$\Omega^{(1)}(z)-\Omega^{(2)}(z)=\tau_1[F^{(n)}(z, w, \Phi'+\Pi\Omega^{(1)})-F^{(n)}(z, w, \Phi'+\Pi\Omega^{(2)})]+(\tau_1-\tau_2)F^{(n)}(z, w, \Phi'+\Pi\Omega^{(2)}),$$

由上式推出$L_{p_0}[\Omega^{(1)}(z)-\Omega^{(2)}(z), \bar{D}]\leqslant|\tau_1-\tau_2|M_{12}$，此处$M_{12}=M_{12}(q_0, p_0, k_0, \alpha, l_0, D, w, \Omega^{(j)})$，这表明$\Omega=g(\omega, \tau)$对$\tau\in[0, 1]$一致连续。

2) 当$\tau=0$时，由(4.53)可知：对所有的$\omega(z)\in B$，均有

$\Omega(z)=g[\omega(z),\ 0]\in \dot{B}_M$.

3) 从估计式(4.21)得知：积分方程组 $\Omega(z)=g[\Omega(z),\tau](0\leqslant \tau\leqslant 1)$ 不具有 $L_{p_0}[\Omega(z),\ \bar{D}]=M$ 的解 $\Omega(z)$，即在 B_0 的边界 $fB_0=\bar{B}_0\backslash B_0$ 上不包含 $\Omega=g(\Omega,\ \tau)$ 的解。

因此，由 [75]、[45] 中的 Leray-Schauder 定理，则知 $\Omega(z)=g[\Omega(z),\ \tau]$ 对每一个 $\tau\in[0,\ 1]$ 特别对 $\tau=1$ 在 B_M 内存在着解 $\Omega(z)$，于是 $w(z)=\Phi(z)+T\Omega$ 就是一阶复方程组 (4.47) 之问题 B 的解。

余下还要消去复方程组 (4.47) 的系数在 D_n 外等于 0 的假定。由定理 4.2，复方程组 (4.47) 之问题 B 的解 $w^{(n)}(z)$ 满足估计式 (4.21)，因此能从 $\{w^{(n)}(z)\}$ 选取子序列不妨设原序列在 $\bar{D}$ 上一致收敛到 $w^{(0)}(z)$，又从 $\{w_{\bar{z}}^{(n)}\}=\{\omega^{(n)}(z)\}$，$\{w_z^{(n)}\}$ 选取子序列不妨设原序列在 D 上分别弱收敛到 $\omega^{(0)}(z)$、$Y(z)$，根据广义微商的定义，对于任意的 $\varphi(z)\in D_1^0(D)$，有

$$\iint\limits_D[w^{(n)}(z)\varphi_z+w^{(n)}{}_z\varphi(z)]d\sigma_z=0,$$

当 $n\to\infty$ 时，得到

$$\iint\limits_D[w^{(0)}(z)\varphi_z+Y(z)\varphi(z)]d\sigma_z=0,$$

故 $[w^{(0)}(z)]_z=Y(z)$，当 $z\in D$。仿照前面证明 (4.56) 式中的 $L_{p_0}[C_k^{(j)}(z),\ \bar{D}]\to 0$，当 $j\to\infty$，我们可证：当 $n\to\infty$ 时，有 $L_{p_0}[F^{(n)}(z,\ w^{(n)},\ w_z^{(0)})-F(z,\ w^{(0)},\ w_z^{(0)}),\ \bar{D}]\to 0$。并且还可证：$F^{(n)}(z,\ w^{(n)},\ w_z^{(n)})-F^{(n)}(z,\ w^{(n)},\ w_z^{(0)})$ 在 $\bar{D}$ 上弱收敛于 0。事实上，

$$|F_k^{(n)}(z,w^{(n)},w_z^{(n)})-F_k^{(n)}(z,w^{(n)},w_z^{(0)})|\leqslant\sum_{k=1}^m|(w_k^n-w_k^{(0)})_z|,$$

$$k=1,\cdots,m,$$

因此只要证明：当 $n\to\infty$ 时 $f_k^{(n)}(z)=|(w_k^{(n)}-w_k^{(0)})_z|$ 在 $\bar{D}$ 上弱收敛于 0，$k=1, \cdots, m$。否则，存在一个正整数 $k_0(1\leqslant k_0\leqslant m)$，可从 $\{f_{k_0}^{(n)}(z)\}$ 选取子序列不妨设原序列在 $\bar{D}$ 上弱收敛于 $f_{k_0}^{(0)}(z)$，它在正测度集 $E\subset D$ 上为正，这与 $[w^{(n)}(z)-w^{(0)}(z)]_z$ 弱收敛于 0 矛盾，故 $|F^{(n)}(z, w_z^{(n)}, w_{\bar{z}}^{(n)})-F_z^{(n)}(z, w_z^{(n)}, w_{\bar{z}}^{(0)})|$ 在 $\bar{D}$ 上弱收敛于 0，又 $F^{(n)}(z, w^{(n)}, w^{(n)}{}_z)-F^{(n)}(z, w^{(n)}, w_z^{(0)})$ 在 $\bar{D}$ 上也弱收敛于0，即 $F^{(n)}(z, w^{(n)}w_z^{(n)})$ 在 $\bar{D}$ 上弱收敛于 $F(z, w^{(0)}, w_z^{(0)})$。再由 $w^{(n)}(z)$ 对 z 的广义微商定义，当 $n\to\infty$，可得对任意的 $\varphi(z)\in D_1^0(D)$，有

$$\iint_D[w^{(0)}(z)\varphi_{\bar{z}}+F(z,w^{(0)}, w_z^{(0)})\varphi(z)]d\sigma_z=0.$$

因此有 $w_{\bar{z}}^{(0)}=F(z, w^{(0)}, w_z^{(0)})$，故 $w^{(0)}(z)$是一阶复方程组(4.46)于 D 内的解，且满足边界条件 (4.17)、(4.19)，故 $w^{(0)}(z)$ 是 (4.46) 之问题 B 的解。

定理 4.3 设一阶非线性复方程 (3.13) 满足条件 C，又 (3.32)、(4.16) 中的正数 ε 适当小，则 (3.13) 之问题 B 是可解的。

证 我们考虑形如下的一阶复方程组

(4.57) $w_{\bar{z}}-G(z, w, w_z)=\tau f(z, w, w_z)+A(z)$, $G=\tilde{Q}^{(1)}w_z+\tilde{Q}^{(2)}\bar{w}_{\bar{z}}+\tilde{A}^{(1)}w+\tilde{A}^{(2)}\bar{w}$,

这里 $\tau(0\leqslant\tau\leqslant1)$ 为实参数，$f=q^{(1)}w_z+q^{(2)}\bar{w}_{\bar{z}}+a^{(1)}w+a^{(2)}\bar{w}$。$\tilde{Q}^{(j)}=(\tilde{Q}_{kl}^{(j)}(z, w_z))_{m\times m}$，$\tilde{A}^{(j)}=(\tilde{A}_{kl}^{(j)}(z))_{m\times m}$，$q^{(j)}=(q_{kl}^{(j)}(z, w_z))_{m\times m}$，$a^{(j)}=(a_{kl}^{(j)}(z))_{m\times m}$；$\tilde{Q}_{kl}^{(j)}=Q_{kl}^{(j)}$，$\tilde{A}_{kl}^{(j)}=A_{kl}^{(j)}$，$q_{kl}^{(j)}=0$，$a_{kl}^{(j)}=0$，$1\leqslant k\leqslant l\leqslant m$；$\tilde{Q}_{kl}^{(j)}=0$，$\tilde{A}_{kl}^{(j)}=0$，$q_{kl}^{(j)}=Q_{kl}^{(j)}$，$a_{kl}^{(j)}=A_{kl}^{(j)}$，$1\leqslant k<l\leqslant m$，$j=1, 2$，$A=(A_1(z), \cdots, A_m(z))'$，$A_k\in L_p(\bar{D})$，$k=1,\cdots,m, p>2$。当 $\tau=0$，$A=A^{(3)}$，则复方程组 (4.57) 就是 (4.46) 的特殊情形，如引理 4.2 的证明，可知此时 (4.57) 之

问题 B 是可解的。下面证明：若对 $\tau=\tau_0(0\leqslant\tau_0\leqslant 1)$，(4.57) 之问题 B 可解，则存在一正常数 δ，使得当 $|\tau-\tau_0|\leqslant\delta$，$0\leqslant\tau\leqslant 1$，复方程组 (4.57) 之问题 B 均可解。为此，我们将 (4.57) 改写成

$$(4.58)\quad w_{\bar{z}}-G(z,\ w,\ w_z)-\tau_0 f(z,\ w,\ w_z)=(\tau-\tau_0)f(z,\ w,\ w_z)+A(z),$$

从引理 4.1 与定理 4.2 知解析函数向量之问题 B 存在唯一解 $w^{(0)}(z)$，且 $w^{(0)}(z)\in C_\beta(\bar{D})\cap W^1_{p_0}(D)$，$\beta$，$p_0$ 是定理 4.2 中所述的常数。将 $w^{(0)}(z)$ 代入 (4.58) 等号右边 w 的位置，则可求得 (4.58) 之问题 B 的解 $w^{(1)}(z)\in C_\beta(\bar{D})\cap W^1_{p_0}(D)$，类似于引理 4.1，我们可求得一串函数向量 $\{w^{(n)}(z)\}$，它是以下复方程组之问题 B 的解。

$$(4.59)\quad \begin{cases} w_{n+1\bar{z}}-G(z,\ w_{n+1},\ w_{n+1z})-\tau_0 f(z,\ w_{n+1},\ w_{n+1\bar{z}}) \\ \quad =(\tau-\tau_0)f(z,w_n,w_{nz})+A(z), \end{cases}$$

从上式可得

$$(4.60)\quad \begin{cases} (w_{n+1}-w_n)_{\bar{z}}-G(z,\ w_{n+1},\ w_{n+1z})+G(z,\ w_n,\ w_{nz}) \\ \quad -\tau_0[f(z,\ w_{n+1},\ w_{n+1z})-f(z,\ w_n,\ w_{nz})] \\ =(\tau-\tau_0)[f(z,w_n,\ w_{nz})-f(z,\ w_{n-1},\ w_{n-1z})], \end{cases}$$

又 $w_{n+1}(z)-w_n(z)$ 满足边界条件

$$(4.61)\quad \mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}\ [w_{n+1}(z)-w_n(z)]\}=h(z),\ \ z\in\Gamma,$$

$$(4.62)\quad \mathrm{Im}\{\overline{\lambda(a_j)}[w_{n+1}(a_j)-w_n(a_j)]\}=0,\ \ j\in\{j\}.$$

使用定理 4.2 中的估计式 (4.20)，可得

$$(4.63)\quad \begin{cases} S_n=C_\beta[w_{n+1}-w_n,\ \ \bar{D}]+L_{p_0}[|(w_{n+1}-w_n)_{\bar{z}}|+|(w_{n+1} \\ \quad -w_n)_z|,\ \ \bar{D}]\leqslant|\tau-\tau_0|M_{13}S_{n-1}, \end{cases}$$

这里 $M_{13}=M_{13}(q_0,\ p_0,\ k_0,\ \alpha,\ l_0,\ D)$。仿照引理 4.1 的证明，使用参数开拓法，可证当 $\tau=1$、$A(z)=A^{(3)}(z)$ 时复方程组 (4.57) 之问题 B 是可解的，而此解的唯一性可由定理 4.2 推

出。

余下还要转到一阶非线性复方程组（3.13）.引入 Banach 空间 $B=C(\bar{D})$ 中的有界闭凸集 B_M，其中元素是满足以下条件的连续函数向量 $w(z)=(w_1(z),\ \cdots,w_m(z))'$.

$$(4.64)\qquad C(w,\ \bar{D})=\sum_{k=1}^{m}C[w_k(z),\ \bar{D}]\leq M_5,$$

此处 M_5 是（4.21）式中的常数. 任取一连续函数向量 $W(z)=(W_1(z),\cdots,W_m(z))'\in B_M$，代入（3.13）系数中函数向量 $w(z)$ 的位置（不要代入 w_z），此时（3.13）是复方程组（4.57）的特殊情形，由前面已证的结论，这样的复方程组（3.13）之问题 B 具有唯一解 $w(z)$，记从 $W(z)$ 到 $w(z)$ 的映射为 $w(z)=g[W(z)]$. 根据定理 4.2，可知 $w(z)$ 均满足估计式（4.21），因而也满足（4.64）. 对于任一函数向量序列 $W^{(n)}(z)\in B_M$，$n=1,2,\cdots$，由于 $w^{(n)}(z)=g[W^{(n)}(z)]$满足估计式（4.21），$n=1,2,\cdots$，故可从 $\{w^{(n)}(z)\}$ 选取子序列在 $\bar{D}$ 上一致收敛到连续函数向量 $w^{(0)}(z)$，这表明 g 将 B_M 映射到自身的紧集. 为了证明 g 是 B_M 上的连续映射，任取一函数向量序列 $W^{(n)}(z)\in B_M$，$n=0,\ 1,\ 2,\cdots$，使得当 $n\to\infty$ 时 $C[W^{(n)}(z)-W^{(0)}(z),\ \bar{D}]\to 0$，注意到 $w^{(n)}(z)=g[W^{(n)}(z)]$ $(n=0,\ 1,2,\cdots)$ 的唯一性，则仿(4.56)中 $L_{p_0}[\Omega_k^{(j)}-\Omega_k^{(0)},\ \bar{D}]\to 0$(当 $j\to\infty$) 的证法，可证 $C[w^{(n)}(z)-w^{(0)}(z),\ \bar{D}]\to 0$（当 $n\to\infty$）. 这就证明了 g 是将 B_M 连续映射到自身的紧集，由 Schauder 不动点定理（见[107]），可知存在一连续函数向量 $w(z)$，使 $w(z)=g[w(z)]$，而 $w(z)$就是一阶非线性复方程组（3.13）之问题 B 的解.

定理 4.4 在定理 4.3 的条件下，复方程组（3.13）之问题 A 的可解性如下

（1）当 $K_k\geq N(k=1,\cdots,m)$，则问题 A 是可解的；

(2) 当 $0 \leqslant K_k < N(k=1,\cdots,m)$，则问题 A 的可解条件个数 $\leqslant mN - \sum_{k=1}^{m} K_k$；

(3) 当 $K_k < 0(k=1,\cdots,m)$，则问题 A 有 $m(N-1) - 2\sum_{k=1}^{m} K_k$ 个可解条件.

此外，还可写出其它情形下问题 A 的可解条件个数.

证 根据定理4.3，(3.13) 之问题 A 有解 $w(z)$，将此解 $w(z)$ 代入到边界条件 (4.17)，如果其中的 $h(t)=0$，$t \in \Gamma$，则此解 $w(z)$ 也是 (3.13) 之问题 A 的解，而 $h(t)=0$ 的条件便可推出定理中所述的可解条件个数.

最后还要提及：用类似方法还可讨论一阶非线性复方程组 (3.13) 之 Haseman 边值问题及一阶线性复方程组 (4.1) 之 Riemann-Hilbert 问题的可解性.

§5 二阶椭圆型复方程组的边值问题

本节先讨论二阶非线性椭圆型复方程组的斜微商边值问题，然后讨论二阶线性复方程组的相应边值问题.

一、二阶非线性复方程组的斜微商问题

所谓二阶非线性椭圆型复方程组 (3.34) 在 $N+1$ 连通区域 D 上的斜微商边值问题或 Poincaré 边值问题（**问题 P**），即求 (3.34) 于 $\bar{D}$ 上的连续可微解 $u(z)=(u_1(z),\cdots,u_m(z))'$，使它满足边界条件

$$
(5.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_k}{\partial l_k}+2\sum_{l=1}^{m}\sigma_{kl}(t)u_l(t)=2\tau_k(t),\ t\in\Gamma,\ k=1,\cdots,m, \\ \text{即 } \mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}u_t]+\sigma(t)u(t)=\tau(t), t\in\Gamma, \end{cases}
$$

其中

$\lambda(t)=(\lambda_{kl}(t))_{m\times m}, \sigma(t)=(\sigma_{kl}(t))_{m\times m}, \tau(t)=(\tau_1(t),\cdots,\tau_m(t))'$.
并设 $\det\lambda(t)\neq 0$，不妨设 $|\lambda_{kk}(t)|=1$，$t\in\Gamma$，$k=1,\cdots,m$，又设

$$
(5.2)\quad \begin{cases} C_\alpha[\lambda_{kj}(t),\Gamma]\leqslant l_{kj}\leqslant l_0, k,j=1,\cdots,m; l_{kj}\leqslant\varepsilon, 1\leqslant k<j\leqslant m. \\ C_\alpha[\sigma_{kj}(t),\ \Gamma]\leqslant\varepsilon,\ C_\alpha[\tau_k(t),\ \Gamma]\leqslant l_0,\ k、j=1,\cdots,m, \end{cases}
$$

这里 $\alpha\left(\dfrac{1}{2}<\alpha<1\right)$、$l_0$ 都是实常数，ε 是如前所述的适当小的正常数，记 $K_k=\dfrac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg\lambda_{kk}(t)$，而 $K=(K_1,\cdots,K_m)'$ 称为问题 P 的标数。

为了讨论复方程组（3.34）之问题 P 的可解性，我们引入相应的一阶复方程组

$$
(5.3)\quad w_{\bar z}=f(z,\ u,\ u_z,\ w,\ w_z),\ f=\mathrm{Re}[Qw_z+A^{(1)}w+A^{(2)}u + A^{(3)}],
$$

这里 $Q_{kl}=Q_{kl}(z,\ u,\ u_z,\ w_z)$，$A_{kl}^{(j)}=A_{kl}^{(j)}\ (z,\ u,\ u_z), j=1,2$，$A_k^{(3)}=A_k^{(3)}\ (z,\ u,\ u_z)$，$k、l=1,\cdots,m$，并考虑（5.3）适合如下边界条件与关系式的变态边值问题 Q。

$$
(5.4)\quad \mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)]+\sigma(t)u(t)=\tau(t)+h(t),\ t\in\Gamma,
$$

$$
(5.5)\quad \mathrm{Im}[\overline{\lambda(a_j)}w(a_j)]=b_j,\ j\in\{j\},
$$

$$
(5.6)\quad u(z)=u_0+\mathrm{Re}\int_0^z\left[w(z)+\sum_{j=1}^{N}\frac{id_j}{z-z_j}\right]dz,
$$

其中 $h(t)$、a_j、b_j、$\{j\}$ 如（4.18）、（4.19）式中所述，$u_0=(u_{01},\cdots,u_{0m})'$ 为实常数向量，$|u_{0k}|\leqslant l_0$，$k=1,\cdots,m$，$d_j=(d_{j1},\cdots,d_{jm})'$ 都是适当选取的实常数向量，使得由（5.6）式中所确定的函数向

量 $u(z)$在区域 D 内单值。

现在要给出 (5.3) 之问题 Q 解的先验估计。

定理 5.1 设二阶复方程组 (3.34) 满足条件 C，又(3.38)与 (5.2) 中的正常数 ε 适当小，则其相应的一阶复方程组(5.3)之问题 Q 的解 $[w(z),\ u(z)]$ 满足估计式

(5.7) $$Rw=C_\beta[w(z),\bar{D}]+L_{p_0}[|w_{\bar z}|+|w_z|,\ \bar{D}]\leqslant M_1,$$

(5.8) $$Su=C_\beta^1[u(z),\bar{D}]<M_2,$$

这里 $p_0\left(2<p_0<\min\left(p,\ \dfrac{1}{1-\alpha}\right)\right)$，$\beta=1-2/p_0$，$M_1$、$M_2$ 都是实常数，$M_j=M_j(q_0,\ p_0,\ k_0,\ \alpha,\ l_0,\ D)$，$q_0=(q_1,\cdots,q_m)'$，$j=1$，2。

证 从 (5.3) 与 (5.4)，我们有

(5.9) $$L_p\Big[\sum_{n=1}^{m}A_{kn}^{(2)}u_n+A_k^{(3)},\ \bar{D}\Big]\leqslant\varepsilon Su+k_0,$$

(5.10) $$C_\alpha\Big[-\sum_{n=1}^{m}\sigma_{kn}u_n+\tau_k(t),\ \Gamma\Big]\leqslant\varepsilon Su+l_0,\ k=1,\cdots,m.$$

记 $H=\varepsilon Su+k_0+l_0+1$，$W(z)=w(z)/H$，$U(z)=u(z)/H$，易知 $W(z)$ 是一阶复方程组

(5.11) $$W_{\bar z}=G(z,\ u,\ u_z,\ U,\ W,\ W_z),\ G=\mathrm{Re}[QW_z+A^{(1)}W+A],\ A=A^{(2)}U+A^{(3)}/H$$

满足边界条件

(5.12) $$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}W(t)]=r(t)+h(t),$$
$$r(t)=-\sigma(t)U(t)+\tau(t)/H,t\in\Gamma,$$

(5.13) $$\mathrm{Im}[\overline{\lambda(a_j)}W(a_j)]=b_j/H,\ j\in\{j\},$$

之 Riemann-Hilbert 问题的解，容易看出：

(5.14) $$L_p[A_k,\ \bar{D}]\leqslant1,\ C_\alpha[r_k,\Gamma]\leqslant1,|b_{jk}/H|\leqslant1,k=1,\cdots,m,$$

因此由定理 4.2 中的估计式 (4.21) 可得

(5.15) $RW \leqslant M_3$，即 $Rw \leqslant M_3(\varepsilon Su + k_0 + l_0 + 1)$，

此处 $M_3 = M_3(q_0, p_0, k_0, \alpha, l_0, D)$，由于 $u(z)$ 与 $w(z)$ 满足关系式（5.6），可推知：

(5.16) $$Su \leqslant l_0 + M_4 Rw,$$

这里 $M_4 = M_4(D)$。将上式代入（5.15），并取 ε 为适当小的正数，使得 $1 - \varepsilon M_3 M_4 > 0$，则得

(5.17) $$Rw \leqslant M_3(l_0(1+\varepsilon) + k_0 + 1)/(1 - \varepsilon M_3 M_4) = M_1,$$

将上式代入（5.16），即得估计式（5.8）。

使用以上定理、定理 4.3 及 Leray-Schauder 定理，我们将证明某些条件下复方程组（5.3）之问题 Q 的可解性。

定理 5.2 在定理 5.1 的相同条件下一阶复方程组（5.3）之问题 Q 是可解的。

证 让我们引入 Banach 空间 $B = C^1(\bar{D})$ 中的有界开集 B_M，其中元素 $u(z)$ 是满足下面条件的函数向量。

(5.18) $$C^1[u, \bar{D}] = \sum_{k=1}^{m}[C(u, \bar{D}) + C(u_z, \bar{D})] < M_2,$$

这里 M_2 是（5.8）中的常数，任意选取向量 $u(z) \in B$，代入一阶复方程组（5.3）中 u、u_z 相应的位置以及边界条件（5.4）中 u 的位置，并考察带有参数 t（$0 \leqslant t \leqslant 1$）的相应复方程组与边界条件

(5.19) $$w_{\bar{z}} = tf(z, u, u_z, w, w_z),$$

(5.20) $$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}w(z)] = -t\sigma(z)u(z) + \tau(z) + h(z), \quad z \in \Gamma,$$

(5.21) $$\mathrm{Im}[\overline{\lambda(a_j)}w(a_j)] = b_j, \quad j \in \{j\}.$$

由定理 4.2，定理 4.3，可知上述边值问题 B 存在着解 $w(z)$，并满足估计式

(5.22) $$C_\beta[w(z), \bar{D}] + L_{p_0}[|w_{\bar{z}}| + |w_z|, \bar{D}] \leqslant M_5,$$

这里 β、p_0 与（4.20）式中的相同，$M_5 = M_5(q_0, p_0, k_0, \alpha, l_0,$

$D,\ M_2)$，再由关系式

$$(5.23)\qquad U(z)=u_0+\mathrm{Re}\int_0^z\left[w(z)+\sum_{j=1}^{N}\frac{id_j}{z-z_j}\right]dz$$

可确定函数向量 $U(z)$，它满足估计式

(5.24) $C^1_\beta[U(z),\ \bar{D}]\leqslant M_6=M_6(q_0,\ p_0,\ k_0,\ \alpha,\ l_0,\ D,\ M_2)$。记从 $u(z)\in B$ 到 $U(z)$ 的映射为 $U=g[u,\ t]$，$0\leqslant t\leqslant 1$。仿照引理 4.2 的证法，可证映射 $U=g[u,\ t]$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 满足 Leray-Schauder 定理的三个条件，因此存在函数 $u(z)\in B_M$，使得 $u=g[u,\ t]$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$。特别当 $t=1$ 时，一阶复方程组(5.19)即 (5.3) 之问题 Q 具有解 $[u(z),\ w(z)]$。

由以上定理，可以导出二阶复方程组 (3.34) 之问题 P 的可解性结果。将一阶复方程组 (5.3) 之问题 Q 的解 $[u(z),\ w(z)]$ 代入到边界条件 (5.4) 与关系式 (5.6)，如果

$$(5.25)\qquad h(t)=0,\quad t\in\Gamma,$$

$$(5.26)\quad d^{(j)}=0,\ j=1,\cdots,N,\ \text{即}\ \mathrm{Re}\int_{\Gamma_j}w(z)dz=0,\ j=1,\cdots,N,$$

那么上述问题 Q 的解 $u(z)$ 也是二阶复方程组(3.34)之问题 P 的解。条件 (5.25) 与定理 4.4 中所述的条件相同，又 (5.26) 共有 mN 个实等式，这样，我们便得以下定理：

定理 5.3 在定理 5.1 同样的条件下，则二阶非线性复方程组 (3.34) 之问题 P 的可解性如下：

若 $K_k\geqslant N$，$k=1,\cdots,m_1$；$0\leqslant K_k<N$，$k=m_1+1,\ \cdots,\ m_2$，$K_k<0$，$k=m_2+1,\ \cdots,\ m$；则复方程组 (3.34) 之问题 P 有

$$mN+(m_2-m_1)N+\sum_{j=m_1+1}^{m_2}k_j+(m-m_2)(N-1)-2\sum_{j=m_2+1}^{m}k_j$$

$$= (2m-m_1)N - m + m_2 - \sum_{j=m_1+1}^{m_2} k_j - 2\sum_{j=m_2+1}^{m} k_j$$ 个可解条件，对于其余情形也可写出问题 P 的可解条件个数。

二、二阶线性复方程组的斜微商问题

其次考虑二阶线性椭圆型复方程组

$$(5.27)\quad u_{z\bar{z}} - \mathrm{Re}[Q(z)u_{zz}] = \varepsilon f(z,\ u,\ u_z) + A^{(3)}(z),$$
$$f = \mathrm{Re}[A^{(1)}(z)u_z + A^{(2)}(z)u]$$

的斜微商边值问题 P，其边界条件为

$$(5.28)\quad \mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}u_z] = -\varepsilon\sigma(z)u(z) + \tau(z) + h(z),\ z\in\Gamma,$$

其中 (5.27) 的系数 Q、$A^{(j)}$ 满足条件 C^*，如 (3.39) 所示 $\varepsilon(-\infty<\varepsilon<\infty)$ 为实参数，还不妨设 $\lambda(z)$ 具有标准形式

$$(5.29)\quad \lambda(z) = \begin{pmatrix} \lambda_1(z) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m(z) \end{pmatrix},\ \lambda_k(z) = \begin{cases} z^k k,\ z\in\Gamma_0, k=1,\cdots,m, \\ e^{i\theta}kj,\ z\in\Gamma_j, j=1,\cdots,N, \end{cases}$$

而 $\sigma(z) = (\sigma_{kj}(z))_{m\times m}$，$\tau(z) = (\tau_1(z),\cdots,\tau_m(z))'$ 满足条件

$$(5.30)\quad C_\alpha[\sigma_{kj}(z),\ \bar{D}]\leqslant l_0,\ C_\alpha[\tau_k(z),\ \bar{D}]\leqslant l_0,\ k,\ j=1,\cdots,m$$

这里 $\alpha\left(\frac{1}{2}<\alpha<1\right)$、$l_0$ 都是常数，又 $h(z)$ 如 (4.18) 所设。

我们还用问题 Q 表示这样的边值问题，即求一阶线性复方程组

$$(5.31)\quad Lw = w_{\bar{z}} - \mathrm{Re}[Q(z)w_z] = \varepsilon f(z,\ u,\ u_z) + A^{(3)}(z)$$

适合以下边界条件与关系式的解 $[u(z),\ w(z)]$。

$$(5.32)\quad lw = \mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}w(z)] = -\varepsilon\sigma(z)u(z) + \tau(z) + h(z),\ z\in\Gamma,$$

$$(5.33)\quad u(z) = u_0 + \mathrm{Re}\int_0^z \left[w(z) + \sum_{j=1}^{N}\frac{id_j}{z-z_j}\right]dz,$$

此处 $u_0 = (u_{01},\cdots,u_{0m})'$ 为任意的实常数向量，d_j 如(5.6) 中所设。下面先给出问题 Q 的解的积分表示式：

引理5.1 设 $[u(z), w(z)]$ 是 (5.27) 之问题 Q 的解，$u(z)\in W^2_{p_0}(D)$，$2<p_0<\min\left(p, \frac{1}{1-\alpha}\right)$，那么

(1) $[u(z), w(z)]$ 具有表示式 (5.33)，其中 $w(z)$ 可表示成

$$\left\{\begin{array}{l} w(z)=\Phi(z)+\tilde{T}\rho, \quad \tilde{T}\rho=-\frac{1}{\pi}\iint_D G(z, \zeta)\rho(\zeta)d\sigma_\zeta, \\ \rho(z)=u_{z\bar{z}}, \quad \Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma P(z, t)r(t)d\theta+\Phi_0(z), \end{array}\right. \tag{5.34}$$

其中 $r(t)=-\varepsilon\sigma(t)u(t)+\tau(t)$，$P(z, t)$、$G(z, \zeta)$ 分别是问题 Q 的 Schwarz 核与 Green 函数，$\Phi(z)$、$\Phi_0(z)$ 是解析函数向量，$G(z, \zeta)$、$\Phi_0(z)$ 满足齐次边界条件

$$\operatorname{Re}[\overline{\lambda(z)}\Phi(z)]=h(z), \quad z\in\Gamma; \tag{5.35}$$

(2) 重积分向量 $\tilde{T}\rho=(\tilde{T}_1\rho_1\cdots, \tilde{T}_m\rho_m)'$ 具有如下性质：

$$(\tilde{T}\rho)_{\bar{z}}=\rho(z), \quad \tilde{S}\rho=(\tilde{T}\rho)_z, \tag{5.36}$$

$$L_{p_0}(\tilde{S}\rho, \bar{D})\leqslant\Lambda_{p_0}L_{p_0}(\rho, \bar{D}), \quad \Lambda_{p_0}<\infty, \tag{5.37}$$

$$\Lambda_2\leqslant 1, \quad 当\ K_k<0, \quad k=1, \cdots, m, \tag{5.38}$$

$$C_\beta[\tilde{T}\rho, \bar{D}]\leqslant ML_{p_0}(\rho, \bar{D}), \tag{5.39}$$

这里 $\beta=\min(\alpha, 1-2/p_0)$，$M_7=M_7(p_0, D)$。又满足条件 (5.5) 的解析函数向量 $\Phi(z)$ 满足

$$C_\beta[\Phi(z), \bar{D}]\leqslant M_8, \quad L_{p_0}[\Phi'(z), \bar{D}]\leqslant M_9, \tag{5.40}$$

此处 $M_j=M_j(p_0, \alpha, l_0, D)$，$j=8, 9$。此外，对常数 $mq_0<1$，存在常数 $p_0\left(2<p_0<\min\left(p, \frac{1}{1-\alpha}\right)\right)$，使得

$$mq_0\Lambda_{p_0}<1, \quad 当\ K_k\leqslant 0, \quad k=1, \cdots, m. \tag{5.41}$$

证 注意到 $\rho(z)=(\rho_1(z), \cdots, \rho_m(z))'$ 等，使用书[128]31) 第二章 §2 中的结果，可以证明本定理。

现在我们使用线性算子方程的 Fredholm 定理，讨论前述问题 Q 与问题 P 的可解性。

当 $K_k<0$, $k=1,\cdots,m$, 使用引理 5.1 与压缩映射原理，可求得边值问题 Q_1：

$$(5.42)\qquad Lw=A^{(3)}(z),\ z\in D,$$

$$(5.43)\qquad lw=\tau(z)+h(z),\ z\in\Gamma$$

的唯一解 $w_0(z)$。又对于任一向量 $u(z)\in C^1(\bar{D})$，也可求得边值问题 Q_2：

$$(5.44)\qquad Lw=f(z,\ u,\ u_z),\ z\in D,$$

$$(5.45)\qquad lw=-\sigma(z)u(z)+h(z),\ z\in\Gamma$$

的唯一解 $w(z)\in C_\beta(\bar{D})$。用 $w=R_2u$ 表示这个从 $u(z)\in C^1(\bar{D})$ 到 $w(z)\in C(\bar{D})$ 的映射。又用 $u=R_1w$ 表示由（5.33）中的积分项所示从 $w(z)\in C(\bar{D})$ 到 $u(z)\in C^1(\bar{D})$ 的映射。易知 R_1 是一线性有界算子，R_2 是一线性有界的完全连续算子，这样，我们得到线性算子方程

$$(5.46)\qquad u-\varepsilon R_1R_2u=R_1w_0+u_0,$$

这里 u_0 是任意实常数向量。因为 R_1R_2 是从 $C^1(\bar{D})$ 映射到自身的线性有界的完全连续算子，使用线性算子方程的 Fredholm 定理，以

$$(5.47)\qquad \varepsilon_j(j=1,2,\cdots):\ |\varepsilon_j|\leqslant|\varepsilon_{j+1}|,\ j=1,2,\cdots$$

表示齐次算子方程

$$(5.48)\qquad u-\varepsilon R_1R_2u=0$$

的离散特征值。这样，类似于定理 4.1 的证法，我们可得如下结果：

定理 5.4 设二阶线性椭圆型复方程组（5.27）的系数 $Q(z)$、$A^{(j)}(z)(j=1,\ 2,\ 3)$ 满足条件 C^*，又 $K_k\leqslant 0$, $k=1,\cdots,m$。

(1) 若 ε 不是相应齐次算子方程（5.48）的特征值，则（5.31）之问题 Q 是可解的。若 ε 是（5.48）秩为 q 的特征值，则此问题 Q 有 $q-s$ 个可解条件，$s\leqslant q$。

(2) 若 $K_k<0(k=1,\ \cdots,\ m)$, $\varepsilon\neq\varepsilon_j$, $\varepsilon_j(j=1,\ 2,\ \cdots)$ 是

(5.48) 的特征值，则 (5.27) 之问题 P 有 $-2\sum_{k=1}^{m} K_k+2mN-m-s$ 个可解条件，它的通解包含有 $m-s$ 个任意实常数，$s\leqslant\min\left(m,\ -2\sum_{k=1}^{m}K_k+2mN-m\right)$.若 ε 是(5.48) 的秩为 q 的特征值，则问题 P 有 $-2\sum_{k=1}^{m}K_k+2mN-m+q-s$ 个可解条件，它的通解包含有 $m+q-s$ 个任意实常数，$s\leqslant\min\left(m+q,\ -2\sum_{k=1}^{m}K_k+2mN-m+q\right)$。我们还可写出其它情形下问题 P 的可解条件个数及其通解所包含的任意实常数的个数。

最后，我们讨论边界条件 (5.28) 更一般的情形，即其中 $\lambda(z)$ 如 (5.1) 式中所述，并满足 (5.2) 中所述的条件。我们仍把求解二阶线性椭圆型复方程组 (5.27) 满足这样一般边界条件 (5.1) 的斜微商问题记作**问题** P，并把求解相应的一阶线性复方程组 (5.3) 适合一般变态边界条件 (5.32)、关系式 (5.33) 的边值问题记作**问题** Q。

下面讨论这种一般的边值问题 Q 的可解性。今设复方程组 (5.31) 中的系数 $Q(z)$ 满足条件 (3.37)、(3.38)，$A^{(j)}(z)$ 满足条件 (3.35)。当 $K_k\geqslant N(k=1,\cdots,m)$，由定理 4.3，可求得形如 (5.42)、(5.43) 的问题 Q_1 的通解 $w(z)=w_0(z)+w^*(z)$，这里 $w_0(z)$ 是问题 Q_1 的一特解，而

$$(5.49)\quad \begin{cases} w^*(z)=(C_1w_1^*(z),\ \cdots,\ C_mw_m^*(z))',\ C_k=(C_{k1},\ \cdots,\\ \qquad C_{k2Kk-N+1}),\\ w_k^*(z)=(w_{k1}^*(z),\cdots,w_{k2K_k-N+1}^*(z))',\ k=1,\cdots,m. \end{cases}$$

为相应齐次问题的通解．其次，对任一向量 $u(z)\in C^1(\bar{D})$，我们也可求得形如(5.44)、(5.45)与

(5.50) $$\operatorname{Im}[\overline{\lambda(a_j)}w(a_j)]=b_j,\ j\in\{j\}$$

之问题 Q_2 的通解 $w(z)\in C_\beta(\bar{D})$，这里 b_j 是任意实常数向量，类似于定理5.4的证明，用 $w=R_2u$ 表示从 $u(z)\in C^1(\bar{D})$ 到 $w(z)=C(\bar{D})$ 的映射，又用 $u=R_1w$ 表示从 $w(z)\in C(\bar{D})$ 到 $u(z)\in C^1(\bar{D})$ 的映射，并可得线性算子方程

(5.51) $$u-\varepsilon R_1R_2u=R_1w_0+R_1w^*+u_0,$$

这里 u_0 是任意实常数向量，而(5.51)的齐次算子方程及特征值如(5.48)、(5.47)所示。若 $\varepsilon\neq\varepsilon_j(j=1,\ 2,\cdots)$，则(5.31)之问题$Q$ 可解，其通解

(5.52) $$u(z)=\varepsilon R_1R_2u+R_1w_0+R_1w^*+u_0$$

包含有 $2\sum_{k=1}^{m}K_k-mN+2m$ 个任意实常数。如果 $\varepsilon=\varepsilon_j$ 是(5.48)秩为 q 的特征值，由 s 表示任意常数系数矩阵的秩，$s\leqslant\min\left(q,\ 2\sum_{k=1}^{m}K_k-mN+2m\right)$．这样，我们可确定上述任意实常数中的 s 个，也确定了 q 个代数方程中的 s 个等式。这表明(5.31)的问题 Q 有 $q-s$ 个可解条件，其通解包含有 $2\sum_{k=1}^{m}K_k-mN+2m-s$ 个任意实常数。

至于(5.27)的问题 P。我们将上述问题 Q 的解 $[u(z),\ w(z)]$ 代入到关系式(5.33)，并设 $d_j=0$，$j=1,\cdots,N$。如果 ε 不是(5.48)的特征值，用前述方法，以 s 表示任意常数的系数矩阵的秩，$s\leqslant\min\left(mN,2\sum_{k=1}^{m}K_k-mN+2m\right)$，则(5.27)的问题 P

有 $mN-s$ 个可解条件，而它的通解包含有 $2\sum_{k=1}^{m}K_k-mN+2m-s$ 个任意实常数。如果 ε 是(5.48)的秩为 q 的特征值，我们可类似地讨论（5.27）之问题 P 的可解性。这样便得如下定理：

定理 5.5 设二阶线性椭圆型复方程组（5.27）的系数 $Q(z)$ 满足（3.37）、（3.38），$A^{(j)}(z)$ 满足（3.35），则（5.31）的问题 Q 的可解性如下：

（1）若 ε 不是相应齐次算子方程（5.48）的特征值，则此问题 Q 是可解的；

（2）若 ε 是（5.48）的秩为 q 的特征值，则此问题 Q 有 $q-s$ 个可解条件，$s\leqslant q$。

又（5.27）之问题 P 的可解性如下：

（1）若 $K_k\geqslant N(k=1,\cdots,m)$，且 $\varepsilon\neq\varepsilon_j$，$\varepsilon_j(j=1,2,\cdots)$ 是（5.48）的特征值，则（5.27）之问题 P 有 $mN-s$ 个可解条件，$s\leqslant\min\left(mN,2\sum_{k=1}^{m}K_k-mN+2m\right)$，它的通解包含有 $2\sum_{k=1}^{m}K_k-mN+2m-s$ 个任意实常数；若 ε 是（5.48）的秩为 q 的特征值，则问题 P 有 $mN+q-s$ 个可解条件，它的通解包含有 $2\sum_{k=1}^{m}K_k-mN+2m+q-s$ 个任意实常数，$s\leqslant\min\left(mN+q,2\sum_{k=1}^{m}K_k-mN+2m+q\right)$。

（2）若 $0\leqslant K_k<N(k=1,\cdots,m)$，且 $\varepsilon\neq\varepsilon_j$，则（5.27）之问题 P 有 $2mN-\sum_{k=1}^{m}K_k-s$ 个可解条件，它的通解包含有 $\sum_{k=1}^{m}K_k+$

$2m-s$ 个任意实常数，$s \leqslant \mathrm{mim}\left(2mN-\sum_{k=1}^{m} K_k,\ \sum_{k=1}^{m} K_k+2m\right)$；若

$\varepsilon=e_j$ 是 (5.48)的秩为 q 的特征值，则问题 P 有 $2mN-\sum_{k=1}^{m} K_k+$

$q-s$ 个可解条件，它的通解包含有 $\sum_{k=1}^{m} K_k+2m+q-s$ 任意实常

数，$s \leqslant \mathrm{mim}\left(2mN-\sum_{k=1}^{m} K_k+q,\ \sum_{k=1}^{m} K_k+2m+q\right)$。

(3) 若 $K_k<0(k=1,\cdots,m)$，则 (5.27) 之问题 P 的可解情形如定理 5.4 中所述。

对于其它情形，我们也可写出问题 P 的可解条件个数及其通解所包含的任意实常数的个数。

最后还要提及：使用类似的方法，我们还可讨论二阶线性、非线性椭圆型复方程组(5.27)(3.34) 的 Riemann-Hilbert 等边值问题。

第六章　Clifford 代数上的解析性

§1 Clifford 代数

设 V 是域 F 上的一个有限维向量空间，Q 是从 V 到 F 的一个映射。如果 Q 适合如下条件

1）$Q(ax)=a^2Q(x)$，$a\in F$，$x\in V$，

2）$B(x,\ y)\equiv Q(x+y)-Q(x)-Q(y)$ 是双线性的，则称 Q 是 V 上的一个**二次型**。

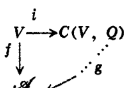
显然，$B(x,\ y)$ 是对称的，即 $B(x,\ y)=B(y,\ x)$ 并且 $B(x,\ x)=2Q(x)$。

作 V 上的张量代数 $T(V)=F\oplus V\oplus(V\otimes V)\oplus(V\otimes V\otimes V)\oplus\cdots\cdots$，则 $T(V)$ 是 V 上的向量空间，并且还是 F 上的代数。设 K_Q 是由所有形如 $x\otimes x-Q(x)1$，$x\in V$ 的元素生成的 $T(V)$ 中的理想。作商代数 $C(V,Q)=T(V)/K_Q$，则称 $C(V,\ Q)$ 为 F **上关于二次型 Q 的 Clifford 代数**

如果 $a\in T(V)$，记 $\bar{a}=a+K_Q\in C(V,\ Q)$，并设 V 到 $C(V,\ Q)$ 的映射 i：$x\to\bar{x}$。因为 V 生成 $T(V)$，所以 $i(V)$ 生成 Clifford 代数。我们有 $\bar{x}^2=Q(x)\bar{1}$。此外，我们断定映射 i 有如下的普遍性：如果 f 是从 V 到代数 $\mathscr{A}$ 的一个线性映射，它使得

$$f(x)^2=Q(x)1,\ x\in V,$$

则存在唯一的从 $C(V,\ Q)$ 到 $\mathscr{A}$ 的代数同态 g 是可交换的。



我们还注意到理想 K_Q 中包含每一个

$$(x+y)\otimes(x+y)-Q(x+y)1=x\otimes x+y\otimes x+x\otimes y$$
$$+y\otimes y-Q(x)1-B(x,\ y)\ 1-Q(y)1,\ x,\ y\in V,$$

又因为 $x\otimes x-Q(x)1$和 $y\otimes y-Q(y)1\in K_Q$，所以

$$x\otimes y+y\otimes x-B(x,\ y)1\in K_Q,\ x,\ y\in V.$$

因而在 $C(V,\ Q)$ 中有关系式

$$\bar{x}\bar{y}+\bar{y}\bar{x}=B(x,\ y)\bar{1},\ \bar{x}^2=Q(x)\bar{1}.$$

利用以上性质我们可以证明：

定理 1.1 如果元素 $u_1,\ u_2,\cdots,\ u_n$ 生成 F 上的向量空间 V，则元素

$$1=\bar{1},\ \bar{u}_{i_1},\ \bar{u}_{i_2},\cdots,\ \bar{u}_{i_r},\ i_1<i_2<\cdots<i_r,\ 1\leqslant r\leqslant n$$

生成 F 上的向量空间 $C(V,\ Q)$.

从定理 1.1 可知：如果 $\dim V=n$，则

$$\dim C(V,\ Q)\leqslant 2^n.$$

此外还可证明如下定理：

定理 1.2 设域 F 的特征$\neq 2$，V 是 F 上的 n 维向量空间，Q 是 V 上的二次型，则

1) $\dim C(V,\ Q)=2^n$;

2) 如果 $(u_1,\cdots,\ u_n)$ 是关于 V 的一个基底，则元素

$$1=\bar{1},\ \bar{u}_{i_1},\ \bar{u}_{i_2},\cdots,\ \bar{u}_{i_r},\ i_1<i_2<\cdots<i_r,\ 1\leqslant r\leqslant n,$$

构成 F 上 $C(V,\ Q)$ 的一个基底，它们满足如下两个关系式

$$\bar{u}_i^2=Q(u_i)\bar{1},$$
$$\bar{u}_i\bar{u}_j+\bar{u}_j\bar{u}_i=B(u_i,\ u_j)\bar{1},\ i\neq j.$$

显然，Q、B 的不同选取能够得到不同的 Clifford 代数。我

们把取 $F=R$（实数域），$Q=-1$，$B=0$ 时所得到的 Clifford 代数记作 $\mathscr{B}_n$。设 V 的正交基底为 $e_1,\cdots,e_n$，则 $\mathscr{B}_n$ 的基底为 $e_0,\ e_1,\cdots,\ e_n,\ \ ,\ e_1e_2,\cdots,\ e_{n-1}e_n,\cdots,\ e_1\cdots e_n$。（其中 $e_0=1$）。特别地，当 $n=1$ 时，$\mathscr{B}_n=Re_0+Re_1=C$（复数域）；当 $n=2$ 时 $\mathscr{B}_2$ 的基底为 $e_0,e_1,e_2,\ e_1e_2$，它们适合

$$e_1^2=e_2^2=-1,\ \ (e_1e_2)^2=-1,$$

$$e_1e_2=(e_1e_2),\ \ e_2(e_1e_2)=e_1,\ \ (e_1e_2)e_1=e_2,$$

记 $e_1=i$，$e_2=j$，$e_1e_2=k$，有

$$i^2=j^2=k^2=-1,\ \ ij=k,\ \ ji=-k,$$

$$jk=i,\ \ kj=-i,\ \ ki=j,\ \ ik=-j.$$

所以 $\mathscr{B}_2$ 是四元数代数（记作 H），即

$$\mathscr{B}_2=H.$$

下面讨论双 Clifford 代数。

我们把由所有积 $uv(u,\ v\in V)$ 所生成的 Clifford 代数 $C(V,\ Q)$ 的子代数叫做**双 Clifford 代数**，记作 $C^+(V,\ Q)$。$C^+(V,\ Q)$ 也称为**二次向量空间 V 上的 Clifford 代数**。

一个向量 u_1 叫做**非迷向向量**，如果它满足 $Q(u_1)\neq 0$。设 u_1 是一个非迷向向量，则

$$\begin{aligned}(u_1u)(u_1v)&=u_1(-u_1u+B(u,\ u_1)1)v\\&=-Q(u_1)uv+B(u,\ u_1)\ u_1v,\end{aligned}$$

因此

$$uv=Q(u_1)^{-1}(B(u,\ u_1)u_1v-(u_1u)(u_1v)).$$

上式表明 $C^+=C^+(V,\ Q)$ 可以由一切形如 u_1u 的元素生成，其中 $u\in V$。我们可以写 V 为如下形式

$$V=Fu_1+(Fu_1)^{\perp},$$

并且

$$u=\alpha u_1+v^*,\ \ \alpha\in F,\ \ v^*\perp u_1,$$

于是 $u_1u=\alpha Q(u_1)1+u_1v^*$。由此可知，$C^+$ 由 u_1v^* 生成，即 C^+

由 $n-1$ 维子空间 $V_1=u_1(Fu_1)^{\perp}$ 所生成，我们有

$$(u_1v)^2=-u_1^2v^2=-Q(u_1)Q(v)1,$$

并且 $-Q(u_1)Q$ 在 $(Fu_1)^{\perp}$ 的限制是一个具有非退化双线性型 B_1 的二次型。因之，我们有一个 $C^+(Fu_1)^{\perp}$，Q_1）到 C^+ 的满射同态。另一方面，如果 $(u_1,\cdots,u_n)$ 是向量空间 V 的一个基底，则 1，$u_{i_1}\cdots\cdots u_{i_r}$，$i_1<\cdots<i_r$ 是 $C(V,Q)$ 的一个基底。因此，元素 1 和 $u_{i_1}\cdots u_{i_r}$（对于偶数 r）是包含在 C^+ 中的，并且这些元素共有 2^{n-1} 个。于是 $\dim C^+\geqslant 2^{n-1}$。而 $\dim C((Fu_1)^{\perp},Q_1)=2^{n-1}$。由此可知 $C^+\cong C((Fu_1)^{\perp},Q_1)$，即 $\dim C^+=2^{n-1}$，这就证明了如下定理：

定理 1.3 设域 F 的特征 $\neq 2$，则双 Clifford 代数 $C^+(V,Q)\cong C((Fu_1)^{\perp},Q_1)$，$\dim C^+=2^{n-1}$，此处 u_1 是任意一个非迷向向量，Q_1 是 $-Q(u_1)Q$ 在 $F(u_1)^{\perp}$ 上的限制。

设 $F=R$ 为实数域，n 维实向量空间 V_n 的正交基底为 $e_1,\cdots,e_n$。记二次 n 维实向量空间 V_n 上的 Clifford 代数为 $\mathscr{A}_n$，则 $\dim\mathscr{A}_n=2^{n-1}$，其基底元素可以写成如下形式：$e_A=e_{a_1}\cdots e_{a_h}$，$A=\{a_1,\cdots a_h\}\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$，$1\leqslant a_1<\cdots<a_h\leqslant n$，并且适合 $e_j^2=-e(j=2,\cdots,n)$，$e_ie_j+e_je_i=0(i\neq j)$，$e_1^2=e_1=1$。

例如当 $n=3$ 时，设 e_1，e_2，e_3 为 V_3 的一组基底，取 e_1 为非迷向向量，则 $(Re_1)^{\perp}$ 的基底元素为 1，e_2，e_3，e_2e_3，于是 $\mathscr{A}_3$ 由 $e_1(Re_1)^{\perp}$ 生成，其基底元素为 e_1，e_1e_2，e_1e_3，$e_1e_2e_3$（共 $2^{3-1}=4$ 个元素）。一般地，$\mathscr{A}_n$ 的基底元素为 $e_1,\cdots,e_n,e_1e_2,\cdots,e_{n-1}e_n,\cdots,e_1\cdots e_n$ 中的 2^{n-1} 个元素。

注意到元素

$$z=x_1e_1+\cdots+x_ne_n,\quad x_i\in R,\quad i=1,\cdots,n$$

组成实向量空间 V_n。称 x_1 为 z 的**实部**。如果对于 $z\in V_n$，定义 **z 的共轭**为

$$\bar{z}=x_1e_1-x_2e_2-\cdots-x_ne_n,$$

则 $z\bar{z}=e_1(x_1^2+\cdots+x_n^2)$。如果 $\mathscr{A}_n$ 中元素 C 的**绝对值**取作

$$|C|^2=(2^{n-1}\text{ 个基底向量的平方和}).$$

则 $|z|^2=|\bar{z}|^2=\bar{z}z=z\bar{z}$。注意到：如果 $z\neq 0$，则

$$z\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)=\frac{\bar{z}}{|z|^2}z=1.$$

因此，V_n 的所有非零元素有乘法逆元。

定义 1.1　对于 $C\in\mathscr{A}_n$，

(1) 如果存在一个 $d\in\mathscr{A}_n$，使得 $cd=dc=|c|^2=|d|^2$，则称 c **是可共轭的**，称 d 为 c **的共轭**，记作 $\bar{c}$；

(2) 如果存在 a，$b\in\mathscr{A}_n$，使得 $cb=bc=1$，则称 c 是**可逆的**，称 b 为 c 的**逆元**，记作 $c^{-1}=1/c=b$。

显然，如果 c 是可共轭的，则 $\overline{(\bar{c})}=c$，并且有以下结果：

假设 $c\in\mathscr{A}_n$，则 c 是可共轭的充要条件是 $c=0$ 或者 c 有满足

$$|c^{-1}|=\frac{1}{|c|}$$

的逆元。并且，如果 $c\neq 0$ 是可共轭的，则

$$\bar{c}=c^{-1}|c|^2,\quad \overline{\left(\frac{1}{c}\right)}=\frac{1}{\bar{c}}.$$

假设 z，$\zeta\in V_n$，则

$|z\zeta|=|z||\zeta|$，$\overline{z\zeta}=\bar{\zeta}\bar{z}$，$z^{-1}\zeta^{-1}=(\zeta z)^{-1}$，$(z,\ \zeta\neq 0)$。

§2 R^n 中的正则函数

一、积分理论

借助于明显的对应

$$z=x_1e_1+\cdots+x_ne_n\leftrightarrow(x_1,\cdots,\ x_n),$$

可知 V_n 与 R_n 等同。假设 D 是 R^n 中的一个开连通集，$U=\sum_{p=0}^{n}\oplus\Lambda^p w$ 是以 $\{dx_1,\cdots,dx_n\}$ 为基底的**外代数**。我们研究微分形式

$$\psi(x)=\sum_{A,H}\psi_{A,H}(x)e_A dx^H,$$

其中 $x\in D\subset R^n$，$\psi_{A,H}(x)$ 是 $C^r(D)$ $(r\geqslant 1)$ 类函数。在 p-链 $\Gamma\subset D$ 上，微分形式 $\psi(x)$ 的积分定义为

$$\int_\Gamma\psi(x)=\sum_{A,H}e_A\int_\Gamma\psi_{A,H}(x)\,dx^H.$$

今后，我们用记号

$$F_D^{(r)}=\{f|f:\ D\to\mathscr{A}_n,\ f(x)=\sum_A f_A(x)e_A\}$$

来表示定义在 D 中，赋值于 $\mathscr{A}_n$ 中的 C^r 类函数的集合。还规定算子

$$\bar\partial(\ \ )=\sum_{\alpha=1}^{n}e_\alpha\frac{\partial(\ \ )}{\partial x_\alpha}:\ F_D^{(r)}\to F_D^{(r-1)},$$

$$(\ \ )\bar\partial=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial(\ \ )}{\partial x_\alpha}e_\alpha,$$

$$\partial(\ \ )=e_1\frac{\partial(\ \ )}{\partial x_1}-e_2\frac{\partial(\ \ )}{\partial x_2}-\cdots-e_n\frac{\partial(\ \ )}{\partial x_n}.$$

显然

$$\bar\partial f=\sum_{\alpha,A}e_\alpha e_A\frac{\partial f_A}{\partial x_\alpha}.$$

因为 $\mathscr{A}_n$ 不是交换代数，所以

$$\bar\partial u=\frac{\partial u}{\partial x_1}+e_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+e_n\frac{\partial u}{\partial x_n},$$

和

$$u\bar\partial=\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}e_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}e_n$$

一般是不同的。

定义 2.1 假设 $D \subset R^n$ 是一个域，$u \in F_D^{(1)}$，

(1) 若 $\bar{\partial} u = 0$（于 D），则称 u 左正则于 D；

(2) 若 $u\bar{\partial} = 0$（于 D）。则称 u 右正则于 D。

易知，当 $n=2$ 时，$\bar{\partial} u = 2(\partial/\partial \bar{z})u$，因此此时左正则等价于解析。注意到，算子 ∂，$\bar{\partial}$ 的形式乘积是 Laplacian 算子

$$\partial\bar{\partial} = \bar{\partial}\partial = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \triangle,$$

所以以下定理成立。

定理 2.1 假设 D 是 R^n 中的一个域，$u \in F_D^{(2)}$，如果在 D 中，u 满足 $\triangle u = 0$，则

(1) ∂u 左正则于 D；

(2) $u\partial$ 右正则于 D。

我们现在建立关于 $F_D^{(1)}$ 中函数的 Stokes-Green 定理：

定理 2.2 如果 $M \subset D$ 是一个 n 维可微定向流形，$f \in F_D^{(r)}$ $(r \geqslant 1)$，且 Γ 是 M 上任意一个 n 链，则

$$(2.1)) \qquad \int_{\dot{\Gamma}} d\sigma f = \int_{\Gamma} \bar{\partial} f dx, \quad dx = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

此处

$$d\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^{\alpha-1} e_\alpha d\hat{x}_\alpha,$$

$$d\hat{x}_\alpha = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha-1} \wedge dx^{\alpha+1} \wedge \cdots > dx^n.$$

证 直接应用 Stokes 定理可得

$$\int_{\dot{\Gamma}} d\sigma f = \int_{\dot{\Gamma}} \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha-1} e_\alpha d\hat{x}_\alpha \sum_A f_A(x) e_A$$

$$=\sum_{a,A}(-1)^{a-1}e_a e_A\int_{\dot\Gamma} d\hat{x}_a f_A$$

$$=\sum_{a,A}(-1)^{a-1}e_a e_A\int_{\Gamma} d(d\hat{x}_a f_A)$$

$$=\sum_{a,A}(-1)^{a-1}e_a e_A\int_{\Gamma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_A}{\partial x_i}dx^i\wedge d\hat{x}_a$$

$$=\sum_{a,A}(-1)^{a-1}e_a e_A\int_{\Gamma}\frac{\partial f_A}{\partial x_a}(-1)^{a-1}dx$$

$$=\sum_{a,A}e_a e_A\int_{\Gamma}\frac{\partial f_A}{\partial x_a}dx=\int_{\Gamma}\bar{\partial}(f)\,dx.$$

以上推导利用了 $dx^i\wedge dx^i=0$ 和微分形式 $\psi(x)$ 的微分的定义

$$d\psi=\sum_{A,H}e_A d\psi_{A,H}\wedge dx^H.$$

由定理 2.2 易知，如果 f 在 D 中左正则，则对于 $M\subset D$ 上的每一个任意的 n 链 Γ，均有

$$\int_{\dot\Gamma} d\sigma f=0.$$

对于两个函数 f，$g\in F_D^{(1)}$，有变形的 Stokes 定理：如果 Γ 是 M 上的任意 n 链，则

$$\int_{\dot\Gamma} f d\sigma g=\int_{\Gamma}[f(\bar{\partial}g)+(f\bar{\partial})g]dx.$$

由此易知，如果 f，$g\in F_D^{(r)}$ 分别是 D 中的右、左正则函数，则对于 M 上的任意 n 链 Γ，有

$$\int_{\dot{\Gamma}} d\sigma g = 0.$$

作为 Cauchy 公式的推广，关于函数 $f \in F_D^{(r)}$ 有以下积分表式示定理：

定理 2.3 (Cauchy–Pompieu) 如果 $S \subset D$ 是一个紧 n 维可微定向流形，其边界为 $\dot{s}$，则对于每一个 $z \in \mathring{S}$(S 的内点)，有

$$(2.2) \qquad f(z) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\dot{s}} \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^n} d\sigma_\zeta f(\zeta) - \frac{1}{\omega_n}\int_{s} \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^n} (\bar{\partial} f)(\zeta) d\zeta$$

和

$$(2.3) \quad f(z) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\dot{s}} f(\zeta) d\sigma_\zeta \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^n} - \frac{1}{\omega_n}\int_{s} (f(\bar{\partial})(\zeta) \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^n} d\zeta,$$

此处 $\omega_n = 2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(n/2)$.

证 今后我们既用 z 表示 D 中的点，也用 z 表示超复 (hypercomplex) 元素 $z = x_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$.

对于 $n \geqslant 3$，有

$$\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^n} = \frac{1}{2-n}\partial(|\zeta - z|^{2-n}) = \frac{1}{2-n}(|\zeta - z|^{2-n})\partial,$$

而对于 $n = 2$，有

$$\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} = \partial(\ln|\zeta - z|) = (\ln|\zeta - z|)\partial.$$

在两种情况下，对于 $z \neq \zeta$，有

$$\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^n}\right) = \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^n}\right)\bar{\partial} = 0.$$

$|\zeta - z|^{2-n}$ $(n \geqslant 3)$ 和 $\ln|\zeta - z|$ 是调和函数. 如果 $S_\varepsilon = S \backslash \{\zeta: |\zeta - z| \leqslant \varepsilon\}$, $z \in \mathring{S}$ 固定，并且关于 z 的 ε 球完全位于 $\mathring{S}$ 内部. 利用 Stokes–Green 定理，可得

$$\int_{S_\varepsilon}\left[\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}(\bar{\partial}f)(\zeta)\right]d\zeta=\int_{\dot{S}_\varepsilon}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}d\sigma_\zeta f(\zeta)$$

$$=\int_{\dot{S}}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}d\sigma_\zeta f(\zeta)-\int_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}d\sigma_\zeta f(\zeta).$$

然而，对于固定的 z，$f(\zeta)$ 可以写成如下形式

$$f(\zeta)=\sum_A f_A(\zeta)e_A+O_A(\varepsilon),\ \lim_{\varepsilon\to 0}O_A(\varepsilon)\to 0.$$

因此

$$\int_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}d\sigma_\zeta f(\zeta)=\int_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}d\sigma_\zeta f(z)+O_A(\varepsilon),$$

而

$$\int_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}d\sigma_\zeta=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|\zeta-z|<\varepsilon}\bar{\partial}(\bar{\zeta}-\bar{z})d\zeta$$

$$=\int_{|\zeta-z|<\varepsilon}\frac{n}{\varepsilon^n}d\zeta=n\int_{\left|\frac{t-z}{\varepsilon}\right|<1}dt=n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$=\omega_n.$$

所以，当 $\varepsilon\to 0$ 时有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}d\sigma_\zeta f(\zeta)=\omega_n f(z).$$

从此，易得（2.2）式，类似可证（2.3）。

当 $\bar{\partial}f=0$ 时，从（2.2）式可得 Cauchy 公式。

二、级数理论

给定形如下的超复数

$$z=\sum_{\alpha=1}^{n}x_\alpha e'_\alpha,\quad e'_\alpha\in\mathscr{A}_n,$$

如果

$$\bar{\partial}(z^p)=0,\ \forall p\in N,$$

则称 z 为**全**（totally）**正则超复数**。为了说明全正则超复数的存在，例如取

$$z_K=x_K-x_1e_K,\ \bar{\partial}z_K=e_K-e_K=0.$$

定理 2.4 一个超复数 $z=\sum_{\alpha=1}^{n}x_\alpha e'_\alpha$ 是全正则的充要条件是：对于全部 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_{p-1})\in\{1,2,\cdots,n\}^{p-1}$，系数 e'_α 满足如下关系式

$$(2.4)\qquad \sum_{\sigma=1}^{n}e_\sigma(e'_{\alpha_1},\cdots,e'_{\alpha_{p-1}})e'_\sigma=0,$$

上述记号 $\{1,2,\cdots,n\}^{p-1}$ 表示取 $1,2,\cdots,n$ 的 $p-1$ 个元素集合的所有可能的具有重复组合。$(e'_{\alpha_1},\cdots,e'_{\alpha_{p-1}})=\sum_{\pi(\alpha_1,\cdots,\alpha_{p-1})}e'_{\alpha_1}\cdots e'_{\alpha_{p-1}}$，其中 $\pi(\alpha_1,\cdots,\alpha_{p-1})$ 代表 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_{p-1})$ 的所有可能具有重复的排列。

证 先证必要性，假设 z 是全正则的，则有 $\bar{\partial}(z^p)=0$ $(\forall p\in N)$。当 $p=0$ 时 (2.4) 成立。当 $p=1$ 时，我们得到 $\bar{\partial}(z)=\sum_\sigma e_\sigma e'_\sigma=0$，即 (2.4) 成立。对于 $p\geqslant0$，我们用归纳法来证。

因为 $z^p=z^{p-1}z$，所以

$$\bar{\partial}(z^p)=\bar{\partial}(z^{p-1})z+\sum_\sigma e_\sigma z^{p-1}D_\sigma(z)=0.$$

依据归纳假设 $\bar{\partial}(z^{p-1})=0$，有

$$\sum_{\sigma} e_{\sigma} z^{p-1} D_{\sigma}(z) = 0.$$

但是

$$z^{p-1} = \sum_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1})} x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_{p-1}} (e'_{\alpha_1}, \cdots, e'_{\alpha_{p-1}}),$$

所以

$$\sum_{\sigma} e_{\sigma} \Big(\sum_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1})} x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_{p-1}} (e'_{\alpha_1}, \cdots, e'_{\alpha_{p-1}}) \Big) e'_{\sigma} = 0.$$

由此易知，对于全部 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1}) \in \{1, 2, \cdots, n\}^{p-1}$，有

$$\sum_{\sigma} e_{\sigma} (e'_{\alpha_1}, \cdots, e'_{\alpha_{p-1}}) e'_{\sigma} = 0.$$

这就证明了必要性。

再证充分性。我们直接计算

$$\begin{aligned} \partial(z^p) &= \sum_{\sigma} e_{\sigma} \Big(\sum_{s=1}^{p} z^{s-1} e'_{\sigma} z^{p-s} \Big) \\ &= \Big(\sum_{\sigma} e_{\sigma} e'_{\sigma} \Big) z^{p-1} + \sum_{\sigma} e_{\sigma} z e'_{\sigma} z^{p-2} \\ &\quad + \cdots + \sum_{\sigma} e_{\sigma} z^{p-1} e'_{\sigma}. \end{aligned}$$

因为 e'_{σ} 满足 (2.4)，所以

$$\sum_{\sigma} e_{\sigma} e'_{\sigma} = 0,$$

$$\sum_{\sigma} e_{\sigma} z e'_{\sigma} = \sum_{\alpha, \sigma} e_{\sigma} x_{\alpha} e'_{\alpha} e'_{\sigma} = \sum_{\alpha} x_{\alpha} e'_{\alpha} \sum_{\sigma} e_{\sigma} e'_{\sigma} = 0,$$

$$\sum_{\sigma} e_{\sigma} z^{p-1} e'_{\sigma} = \sum_{\sigma, \alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1}} e_{\sigma} x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_{p-1}} (e'_{\alpha_1}, \cdots, e'_{\alpha_{p-1}}) e'_{\alpha}$$

$$= \sum_{a_1,\cdots,a_{p-1}} x_1 \cdots x_{a_{p-1}} \sum_{\sigma} e_\sigma (e'_{a_1}, \cdots, e'_{a_{p-1}}) e'_{\bullet}$$

$$= 0.$$

由此 $\bar{\partial}(z^p) = 0$。这就证明了充分性。

如果 $z = \sum_{a=1}^{n} x_a e'_a$ 具有交换性

$$e'_a e'_\beta = e'_\beta e'_a (a, \beta = 1, \cdots, n),$$

则当 z 是正则时，它也是全正则的。

除了变数 z_K 以外，我们还引进记号

$$\bar{z}_k - \bar{a}_K = (x_K - a_K) + (x_1 - a_1) e_K.$$

定义 p **次齐次多项式**为

$$(2.5) \quad \overset{(a)}{V}_{K_1 \cdots K_p}(x) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi(K_1, \cdots, K_p)} (z_{K_1} - a_{K_1}) \cdots (z_{K_p} - a_{K_p}),$$

这里的总和取 $(K_1, \cdots, K_p)$ 的全部具有重复的排列。它在得到 Taylor 展式的交替形式中是有用的。例如，如果 $P_p^{(\,)}$ 是 p 次齐次正则多项式，则它可表为

$$P_p^{(0)}(x) = \sum_{(K_1, \cdots, K_p)} \overset{(0)}{V}_{K_1 \cdots K_p} \overset{(0)}{D}_{K_1 \cdots K_p} \overset{(0)}{P}_p,$$

这里的总和取从元素 $\{2, \cdots, n\}$ 中抽 p 个元素的所有可能具有重复的组合。确实，如果 $[P_p^{(\,)}]$ 是所有关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的 p 次齐次多项式，则 $[P_p]$ 是 $\mathscr{A}_n$ 上的一个右模。齐次多项式

$$B_p^{(0)} = \left\{ V_{K_1 \cdots K_p}^{(0)} : (K_1, \cdots, K_p) \in \{2, \cdots, n\}^p \right\}$$

的集合是关于右模 $[P_p^{(\,)}]$ 的一个生成元的集合。

Delenghe 称函数 f: $R^n \to \mathscr{A}_n$, $f = \Sigma_A f_A e_A$, 当 f 是实解析且在 D 内 $(\bar{\partial} f)(x) = 0$ 或 $(f\bar{\partial})(x) = 0$ 时为**正则解析**于 D。展开 $f(x)$ 成关于 $x = 0$ 的一个实 Taylor 级数，有

$$f(x)=f(0)+x_\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\right)(0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{p!}\sum_{(\alpha_1,\cdots,\alpha p)}x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_p}\left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{\alpha_1}\cdots\partial x_{\alpha_p}}\right)(0)+\cdots,$$

此处

$$\left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{\alpha_1}\cdots\partial x_{\alpha_p}}\right)(0)=\sum_A\left(\frac{\partial^p f_A}{\partial x_{\alpha_1}\cdots\partial x_{\alpha_p}}\right)(0)e_A.$$

第 p 次齐次部分指定为

$$\mathscr{Q}_p=\frac{1}{p!}\sum_{(\alpha_1,\cdots,\alpha p)}x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_p}\left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{\alpha_1}\cdots\partial x_{\alpha_p}}\right)(0).$$

当 f 在原点的一个开邻域中正则且解析时，则 $\mathscr{Q}_p$ 对于所有 p 在 D 中正则。多项式 $\mathscr{Q}_p$ 是右模 $[P_p^{(0)}]$ 的一个元素，即

$$\mathscr{Q}_p(x)=\sum_{(K_1,\cdots,Kp)}V^{(0)}_{K_1\cdots K_p}(x)C_{K_1\cdots K_p},$$

此处，对所有 $(K_1,\cdots,K_p)\in\{2,\cdots,n\}^p$，$C_{K_1\cdots K_p}\in\mathscr{A}_n$。因为

$$\mathscr{Q}_p=\frac{1}{p!}\sum_{(K_1,\cdots,Kp)}\left(\sum_{\pi(K_1,\cdots,Kp)}z_{K_1}\cdots z_{K_p}\right)C_{K_1\cdots K_p}$$

$$=\frac{1}{p!}\sum_{(K_1,\cdots,Kp)}\left(\sum_{\pi(K_1,\cdots,Kp)}z_{K_1}\cdots z_{K_p}\right)\frac{\partial^p\mathscr{Q}}{\partial x_{K_1}\cdots\partial x_{K_p}}$$

$$=\frac{1}{p!}\sum_{(\alpha_1,\cdots,\alpha p)}x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_p}\left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{\alpha_1}\cdots\partial x_{\alpha_p}}\right)(0),$$

我们断定 $C_{K_1}\cdots_{K_p}=(\partial^p f)(\partial x_{K_1}\cdots\partial x_{K_p})(0)$。

从此得到，一个解析正则函数关于原点的 Taylor 展开的交替形式，即

$$f(x)=f(0)+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\Big(\sum_{(K_1,\cdots,K_p)}\Big(\sum_{\pi(K_1,\cdots,K_p)}z_{K_1}\cdots z_{K_p}\Big)\Big(\frac{\partial^p f}{\partial x_{K_1}\cdots\partial x_{K_p}}\Big)(0).$$

因此，在原点的一个开邻域内，正则解析函数依据 $n-1$ 个超复变数 $z_2,\cdots,z_n$ 总能够被表示。另一方面，当

$$\sum_{\pi(K_1,\cdots,K_p)}z_{K_1}\cdots z_{K_p}\in B_p^{(0)},\ \forall(K_1,\cdots,K_p)\in\{2,\cdots,n\}^p,$$

有

$$\bar{\partial}\Big(\sum_{\pi(K_1,\cdots,K_p)}z_{K_1}\cdots z_{K_p}\Big)=0,\ \forall(K_1,\cdots,K_p).$$

因此，如果在原点的某个开邻域

$$f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{(K_1,\cdots,K_p)}\Big(\sum_{\pi(K_1,\cdots,K_p)}z_{K_1}\cdots z_{K_p}\Big)C_{K_1\cdots K_p},$$

此处，$C_{K_1\cdots K_p}\in\mathscr{A}_n$，则 f 解析且正则。

如果我们研究在 $a\in D$ 的一个邻域中的正则解析函数，则导致研究形如

(2.6) $$f(x)=f(a)+$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\Big(\sum_{(K_1,\cdots,K_p)}\Big(\sum_{\pi(K_1,\cdots,K_p)}(z_{K_1}-a_{K_1})\cdots(z_{K_p}-a_{K_p})\Big)$$

$$\Big(\frac{\partial^p f}{\partial x_{K_1}\cdots\partial x_{K_p}}\Big)(a)\Big)$$

的级数。这个表示导出如下定义：

定义 2.2 f：$R^n\to\mathscr{A}_n$ 称为在 $D\subset R^n$ 中**正则解析**，如果对于任意点 $a\in D$，存在一个邻域 $N(a)\subset D$，使得 f 有关于 a 的 Taylor 展开，即

$$f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{(K_1,\cdots,K_p)}\Big(\sum_{\pi(K_1,\cdots,K_p)}(z_{K_1}-a_{K_1})\cdots(z_{K_p}-a_{K_p})\Big)C^{(a)}_{K_1\cdots K_p},$$

此处$C^{(a)}_{K_1\cdots K_p}\in\mathscr{A}_n$。

因为关于正则解析，这里的归一化（normalization）与 Delenghe 的有些区别，所以我们把他 1970 年得到的主要定理重述为

定理 2.5 如果$f\in F_D^{(r)}$在$D\subset R^n$中正则，则对于每个点$a\in D$，存在一个球$B(a,\ r)\Subset D$，使得在$\dot{B}(a,\ r)$内

$$f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\sum_{(a_1,\cdots,a_p)}(x_{a_1}-a_{a_1})\cdots(x_{a_p}-a_{a_p})\Big(\frac{\partial^p f}{\partial x_{a_1}\cdots\partial x_{a_p}}\Big)(a).$$

这个定理的证明利用了 Cauchy 公式（2.2）（其中$\bar{\partial}f=0$），即

$$f(z)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\dot{B}}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}d\sigma_\zeta f(\zeta).$$

从此，当$z\in\dot{D}$时对于每个$(a_1,\cdots,\ a_p)\in\{1,\cdots,\ n\}^p$，我们可以推断

$$(2.7)\quad \frac{\partial^p f}{\partial x_{a_1}\cdots\partial x_{a_p}}=\frac{1}{\omega_n}\int_{\dot{B}}\frac{\partial^p}{\partial x_{a_1}\cdots\partial x_{a_p}}\Big(\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}\Big)d\sigma_\zeta f(\zeta).$$

不失一般性，取原点位于$\dot{D}$中且寻找$\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}$在一个球$B(0,\ r)\Subset D$内关于原点的展开式，即

$$\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}=\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}\Big|_{z=0}+\sum_{a=1}^{n}x_a\Big(\frac{\partial}{\partial x_a}\ \frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}\Big)\Big|_{z=0}+\cdots$$

$$+\frac{1}{p!}\sum_{(a_1,\cdots,a_p)}x_{a_1}\cdots x_{a_n}\Big[\frac{\partial^p}{\partial x_{a_1}\cdots\partial x_{a_n}}\Big(\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}\Big)\Big]_{z=0}+\cdots$$

把上式代入 $f(z)$ 的 Cauchy 展开中且借助于（6.7）确定 f 的导数，从而通过与一致收敛性有关的通常的论证可得上述结果。

另一方面，如果 f 在壳体（shell）$\mathbb{S}=\dot{B}(0, R)\backslash\bar{B}(0, r)$，$R>r$ 内左正则，那么有可能按 Laurent 型级数去展开 f。为此，在 Taylor 展开式（2.6）中，利用由（2.5）所给定的函数 $V_{K_1\cdots K_p}^{(a)}(x)$ 的定义得出形如

$$f(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{(K_1,\cdots,K_p)}V_{K_1\cdots K_p}^{(a)}(x)\left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{K_1}\cdots\partial x_{K_p}}\right)(a)$$

的公式。

为了得到 Laurent 展开式，假定存在一个壳体 $\mathbb{S}_1=\dot{B}(0, R_1)\backslash\bar{B}(0, r_1)\subset\mathbb{S}$，使得 $(\sqrt{2}+1)r_1<(\sqrt{2}-1)R_1$。进一步，我们引进记号 $B_1=B(0, R_1)$；$B_2=B(0, r_1)$，以及 $B_1'=B(0, R_1')$；$B_2'=B(0, r_1')$，其中 $r_1'=(\sqrt{2}+1)r_1$，$R_1'=(\sqrt{2}-1)R_1$。从 Cauchy 公式，对于全部 $z\in\dot{B}\backslash\bar{B}_2$，有

$$f(z)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\dot{B}_1}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}d\sigma_\zeta f(\zeta)-\frac{1}{\omega_n}\int_{\dot{B}_2}\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^n}d\sigma_\zeta f(\zeta)$$

$$\equiv f_1(z)+f_2(z).$$

因为 $f_1(z)$ 对应为于第一个积分，所以它在 $\dot{B}_1$ 正则且在 $\dot{B}_1'$ 内部展开为

$$f_1(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{(K_1,\cdots,K_p)}V_{K_1\cdots K_p}(z)a_{K_1\cdots K_p},$$

此处 $a_{K_1\cdots K_p}=\frac{1}{\omega_n}\int_{\dot{B}_1}W_{K_1\cdots K_p}(\zeta)d\sigma_\zeta f(\zeta)$,

$$W_{K_1\cdots K_p}(\zeta)=\frac{\partial^p}{\partial x_{K_1}\cdots\partial x_{K_p}}\left(\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-x|^n}\right)\bigg|_{x=0}.$$

而 f_2 正则于 $\bar{B}_2$ 外，所以在 $R^n\backslash\bar{B}_2'$ 有下面展开式

$$f_2(\zeta) = -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{(a_1, \cdots, a_p)} \frac{\partial^p}{\partial \zeta_{a_1} \cdots \partial \zeta_{a_p}}$$

$$\times \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^n} \right) \Big|_{z=0} \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_n} \zeta_{a_1} \cdots \zeta_{a_p} d\sigma_\zeta f(\zeta)$$

$$= -\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{(K_1, \cdots, K_p)} \bar{W}_{K_1 \cdots K_p}(x) b_{K_1 \cdots K_p},$$

此处

$$b_{K_1 \cdots K_p} = \frac{1}{\omega_n} \int_{\dot{B}_2} \bar{V}_{K_1 \cdots K_p}(\zeta) d\sigma_\zeta f(\zeta)。$$

且 $\bar{W}_{K_1 \cdots K_p}$ 是右正则函数

$$\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^n} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{(K_1, \cdots, K_p)} \bar{W}_{K_1 \cdots K_p}(z) \bar{V}_{K_1 \cdots K_p}(\zeta),$$

的展开系数，此处

$$\bar{V}_{K_1 \cdots K_p}(z) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi(K_1, \cdots, K_p)} \bar{z}_{K_1} \cdots \bar{z}_{K_p},$$

共轭坐标 $\bar{z}_K$ 由 $\bar{z}_K = x_K - x_1 e_K$，$K = 1, \cdots, n$ 给定。

利用 Stokes 定理，在关于 $a_{K_1 \cdots K_p}$ 积分表示中，我们能以$\dot{B}$代替 $\dot{B}_1$，并且在关于 $b_{K_1 \cdots K_p}$ 的积分表示中能以 $\dot{B}$ 代替 $\dot{B}_2$。因此得到 Laurent 展开式。

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{(K_1, \cdots, K_p)} V_{K_1 \cdots K_p}(x) a_{K_1 \cdots K_p} \tag{2.8}$$

$$-\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{(K_1, \cdots, K_p)} \bar{W}_{K_1 \cdots K_p}(x) b_{K_1 \cdots K_p},$$

其中

$$a_{K_1\cdots K_p}=\frac{1}{\omega_n}\int_{\dot{B}}W_{K_1\cdots K_p}(\zeta)\,d\sigma_\zeta f(\zeta),$$

$$b_{K_1\cdots K_p}=\frac{1}{\omega_n}\int_{\dot{B}}V_{K_1\cdots K_p}(\zeta)\,d\sigma_\zeta f(\zeta),$$

它们在 $\dot{B}_1'\cap(R^n\backslash\bar{B}_2')$ 一致收敛。此外，展开式(2.8)是唯一的。我们把含有 $V_{K_1\cdots K_p}$ 和 $W_{K_1\cdots K_p}$ 的级数分别看作第一和第二级数。

现在介绍奇点和留数定理。

如果存在 $x\in R^n$ 的一个开邻域，在其中 f 正则，则称 x 为 f 的**正则点**。一个点不是正则点就是**奇点**。点 x 称为 m 级的**极点**，如果

(1) x 是 f 的奇点；

(2) f 有一个 Laurent 展开式，它的第二级数在 $p=m$ 处被截去。

如果 Laurent 级数的第二级数没有舍尾，则称 f 在 x 有一个**孤立本性奇点**。

为方便计，以下我们假定奇点位于原点。如果在 Laurent 展开的第二级数中，出现 $\left(\frac{\bar{x}}{|x|^n}\right)b_0$ 一项，则 b_0 称为 f 在 $x=0$ 处的**留数**。因此

$$b_0=\frac{1}{\omega_n}\int_{\dot{B}}d\sigma_\zeta f(\zeta),$$

此处球 B 是适当选取的。如果 f 在原点有一阶极点，则

$$b_0=\lim_{x\to 0}(|x|^{n-2}\bar{x}f(x))$$

给出了确定留数的另外有用的方法。

最后，我们给出类似的 Cauchy 留数定理，这就是

定理 2.6 设 S 是 n 维紧可微、定向流形，如果在 S 的内部 $\dot{S}$，函数 f 有 K 个奇点 a_1，…，a_K，则

$$(2.9) \qquad \int_{\dot{S}} d\sigma f = \omega_n \sum_{j=1}^{K} \operatorname{Res}(f) a_j.$$

三、正则性定理

现在我们转向研究关于非齐次方程

$$\bar{\partial} u = v$$

的弱解的一个正则性定理．为此，我们先引进关于以 Clifford 代数为值域的函数的弱（或 Soblev）导数的概念．

定义 2.3 如果 $\mathbb{S} \subset R^n$ 是一个区域，u，$v \in L^1_{loc}(\mathbb{S})$，并且对于任意 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{S})$，有

$$\iint_{\mathbb{S}} \phi v + (\phi \bar{\partial}) u dx = 0,$$

则称 v 为 u 的**弱导数**（或称 Soblev 导数）.并记作 $v = \bar{\partial} u$（弱），此处 $C_0^\infty(\mathbb{S})$ 是具有包含于 $\mathbb{S}$ 中的紧支撑（Compact Support）的无限可微函数空间．

集中注意力到实数值 ϕ 上，我们直接看到 $\bar{\partial} u$ 唯一确定在零测集上（允许相差一个测度为零的集合）．

为了证明正则性定理，先介绍以下引理：

引理 2.1 设 $\mathrm{Mat}(\partial)$ 是一个 M 行、N 列的矩阵，它的元素全都是具有常系数的偏微分算子．令具有常系数的微分方程组形如

$$(2.10) \qquad \mathrm{Mat}(\bar{\partial}) u = f,$$

此处 $u = (u_1, \cdots, u_N)$，$f = (f_1, \cdots, f_M)$ 是向量．它们的支量是确定在 $\mathbb{S} \subset R^n$ 上的分布．令 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 是一个复 n 组．定义 $\mathrm{Mat}(\xi)$ 是在 $\mathrm{Mat}(\partial)$ 中以 $i\xi_j$ 代替 $(\partial/\partial x_j)$ 所得到的矩阵．还

假定从实点ξ_0到集合$V=\{\xi\text{: Mat}(\xi)\text{ 的秩 }<N\}$的距离，随着$\xi_0$趋于无限大，则如果分布函数(distribution)在Ⓢ满足(2.10)，且$f\in C^\infty(Ⓢ)$，那么u在$C^\infty(Ⓢ)$也满足(2.10)。

定理 2.7 如果Ⓢ$\subset R^n$是一个区域，$u\in L^1_{loc}$(Ⓢ)，$v\in C^\infty$(Ⓢ)，且在Ⓢ中$\bar{\partial}u=v$（弱），则$u\in C^\infty$(Ⓢ)。

证 函数u能够写成

$$u=u_1+e_2u_2+\cdots+e_nu_n.$$

由弱导数的定义，有

$$\int_{Ⓢ}\phi v dx=-\int_{Ⓢ}(\phi\bar{\partial})u dx.$$

特别，当ϕ是实值时，这个式子必成立。因而，由于ϕv仅只对于出现在右边的这些基底元素能够有非零系数，所以v是如下形式

$$v=v_1+e_2v_2+\cdots+e_nv_n+\sum e_je_kv_{jk},$$

此处最后一项的和数取遍$2\leqslant j\leqslant K\leqslant n$。于是，对于$\phi$实值，有

$$(\phi\bar{\partial})u=u_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1}-\sum_{j=2}^n u_j\frac{\partial\phi}{\partial x_j}+\sum_{j=2}^n\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}u_j+u_1\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)e_j$$

$$+\sum_{j,k}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}u_k-\frac{\partial\phi}{\partial x_k}u_j\right)e_je_k,$$

这里，最后一项的和数取遍$2\leqslant j\leqslant k\leqslant n$。这就给出以下$1+[n(n-1)]/2$个分布方程组

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\cdots-\frac{\partial u_n}{\partial x_n}=v_1,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_1}=v_j,\quad 2\leqslant j\leqslant n,$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}=v_{jk},\quad 2\leqslant j\leqslant k\leqslant n,$$

我们将这个写作

$$\text{Mat}(\bar{\partial}u)=f.$$

现在证明，按引理(2.1)定义的集合V仅包含点$\xi=(0,\cdots,0)$。首先假定$\xi\neq 0$，按$\mathrm{Mat}(\xi)$的行可表示如下(把因子i忽略不计)

$$
\begin{array}{lllll}
(\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & \cdots & -\xi_n), \\
(\xi_2 & \xi_1 & 0 & \cdots & 0), \\
(\xi_3 & 0 & \xi_1 & \cdots & 0), \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(\xi_n & 0 & 0 & \cdots\cdots & \xi_1).
\end{array}
$$

容易证明，这些n个向量是线性无关的。因此，对于全部使$\xi_1\neq 0$的ξ，有$\xi\notin V$。

其次，假定$\xi_1=0$，$\xi_2\neq 0$。在这个情况下，$\mathrm{Mat}(\xi)$按它的行可表成如下的n个行向量

$$
\begin{array}{llllll}
(\ 0 & -\xi_2 & -\xi_3 & -\xi_4 & \cdots & -\xi_n), \\
(\ \xi_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\ ), \\
(\ 0 & -\xi_3 & \xi_2 & 0 & \cdots & 0\ ), \\
(\ 0 & -\xi_4 & 0 & \xi_2 & \cdots & 0\ ), \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(\ 0 & -\xi_n & 0 & 0 & \cdots & \xi_2).
\end{array}
$$

这些是线性无关的。因此，对于这个情况也有$\xi\notin V$。

最后，假定$\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_{k-1}=0$，但$\xi_k\neq 0$，则$\mathrm{Mat}(\xi)$的如下$n$行是线性无关的。

$$
\begin{array}{llllll}
(0\cdots\cdots\cdots\cdots 0 & & -\xi_k & -\xi_{k+1}\cdots-\xi_n), & & \\
(\xi_k & 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0), & & & & \\
(0 & -\xi_k\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & & 0), \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(0\cdots\cdots\cdots & -\xi_k & 0 & & 0\cdots\cdots & 0), \\
(0\cdots\cdots\cdots\cdots 0 & & -\xi_{k+1} & & \xi_k\cdots\cdots & 0), \\
(0\cdots\cdots\cdots\cdots 0 & & -\xi_{k+2} & & 0\cdots\cdots & 0), \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
(0\cdots\cdots\cdots\cdots 0 & & -\xi_n & & 0\cdots\cdots & \xi_k).
\end{array}
$$

这样 V 仅包含 $\xi=0$，并且明显地，这些满足引理 2.1 的假定。利用此引理，我们可导出 $u\in C^\infty(Ⓢ)$。

推论 2.1 如果Ⓢ是 R^n 中的一个区域，$u\in L^1_{loc}(Ⓢ)$ 并且在Ⓢ中 $0=\bar{\partial}u$（弱），则 u 是（左）正则的。

四、Hilbert 模

为了方便叙述沿着 Clifford 代数取值的函数的理论，我们引进 Hilbert 模的概念。为此，我们指定一个线性空间 $\mathscr{H}$，其纯量取自一个有限维 $\mathscr{H}^*$ 代数 $\mathscr{A}$ 的元素。这个空间具有向量加法和按纯量的右乘。这些运算由以下法则所支配（f, g, $h\in\mathscr{H}$, a, $b\in\mathscr{A}$）：

(a) $f+g=g+f$,

(b) $(f+g)+h=f+(g+h)$,

(c) $f(a+b)=fa+fb$,

(d) $(f+g)a=fa+ga$,

(e) $(fa)b=f(ab)$,

(f) $f\cdot 0=0$, $f\cdot 1=f$.

这个代数 $\mathscr{A}$ 能够是在实数域或复数域上的，作为一个有限 $\mathscr{H}^*$ 代数，它有如下性质：

(1) $\mathscr{A}$ 是一个具有 I 的 Banach 代数，其基础 Banach 空间是一个具有内积 $<,>$ 和由 $\|a\|=(<a, a>)^{\frac{1}{2}}$ 给出范数的有限维 Hilbert 空间；

(2) $\mathscr{A}$ 有一个对合（involution）$a\to a^*$ 满足

$$(\lambda a)^*=\bar{\lambda}a^* \quad (\lambda \text{ 是实或复的}),$$

$$(ab)^*=b^*a^*,$$

$$(a^*)^*=a;$$

(3) $<ab, c>=<b, a^*c>=<a, cb^*>$.

$\mathscr{A}$ 中的元素 a 称为**对称的**，如果 $a=a^*$；并且 $\mathscr{A}$ 中的元素 a 称为**正的**，如果 a 是对称的、又对于 $\mathscr{A}$ 中的所有 b 有 $\langle ab, b\rangle \geqslant 0$。我们说，元素 e 是在 $\mathscr{A}$ 中的一个投影，如果 $e=e^2=e^*$。

此外，可以证明有限维 $\mathscr{C}^*$ 代数还有另外的性质：

(4) 如果 a 是正的，则 a 有一个表示式

$$a=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 e_i,$$

此处 e_is 是在 $\mathscr{A}$ 中的一个投影，$e_ie_j=0$（当 $i\neq j$）。并且每个 λ^i 是一个正实数，此外，a 有唯一正平方根由

$$a^{\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$$

给出。

作为定义 Hilbert 模的进一步的先决条件，我们假设 $\mathscr{H}$ 自身有一个内积 (f, g)，$f, g\in\mathscr{H}$ 的内积的值在 $\mathscr{A}$ 中，并且由如下规则所支配：

(g) $(f+g, h)=(f, h)+(g, h)$，

(h) $(f, g)^*=(g, h)$，

(i) (f, f) 是正的，并且当且仅当 $f=0$ 时，$(f, f)=0$。

(j) 对于 $\mathscr{A}$ 中的 a 有，$(f, ga)=(f, g)a$。

今后我们假定 $\mathscr{A}$ 中的范数是正规的（normalize）。因此，单位元的范数是 1。对于任意的元素 $a\in\mathscr{A}$，我们定义迹(trace)为 $\text{tr}a=\langle a, I\rangle$。因此，$\text{tr}I=1$，$\text{tr}(ba)=\langle a, b^*\rangle=\text{tr}(ab)$，并且 $\text{tr}b^*a=\langle a, b\rangle$。元素 $a\in\mathscr{A}$ 的模用 $|a|=\text{tr}[(aa^*)^{\frac{1}{2}}]$ 来定义。此处 $(aa^*)^{\frac{1}{2}}$ 表示 aa^* 的唯一的正平方根。我们注意到，两个范数按照

$$|a|<\|a\|\leqslant ka$$

(对于某个 $k>1$ 和 $a\in\mathscr{A}$) 是等价的。

在函数空间 $\mathscr{H}$ 上，范数定义为

$$\|f\|_{\mathscr{H}} = |(f,f)|^{\frac{1}{2}} = \operatorname{tr}(f,f).$$

关于 $\mathscr{H}$ 的最后条件是

(k) $\mathscr{H}$ 关于 $\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$ 是完备的。

定义 2.4 定义在域Ⓢ上，又在代数 $\mathscr{A}$ 内取值的函数族 $\mathscr{H}=\mathscr{H}(Ⓢ)$ 称为 **Hilbert 函数模** $\mathscr{H}$，如果(1) 在加法和以 $\mathscr{A}$ 的元素右乘的情况下，它是封闭的；(2) 它具有取值在 $\mathscr{A}$ 中的内积；(3) 条件(a)至(k)都成立。

取值在 $\mathscr{A}$ 中的 Hilbert 模 $\mathscr{H}$ 上的线性泛函叫做**有界的**，如果

$$|Lf|\leqslant M\|f\|_{\mathscr{H}},\quad \forall f\in\mathscr{H},$$

此处 M 与 f 无关。

定理 2.8 如果 f，$g\in\mathscr{H}$，则

$$|(g,\ h)|\leqslant\|g\|_{\mathscr{H}}\|f\|_{\mathscr{H}}.$$

除了 f 或 g 为零，当且仅当 $g=fa$ 时，等式成立，此处 a^*a 是 $\mathscr{A}$ 中单位元素的实数倍。

定理 2.9 如果 L 是 $\mathscr{H}$ 上的一个有界线性泛函，则在 $\mathscr{H}$ 中存在唯一的 g 使得，对于 $\mathscr{H}$ 中的 f，有

$$Lf=(g,\ f).$$

定义 2.5 一个 Hilbert 函数模 $\mathscr{H}$(Ⓢ)叫做有**再生核** (reprodueing kernel) $K=K(x,\ y)$的，如果

(1) K 逐点定义在 Ⓢ×Ⓢ 上，取值在 $\mathscr{A}$ 上；

(2) 对于Ⓢ中的每个固定的 x，由 $K_x(y)=K(x,\ y)$ 给定的函数 K_x 在$\mathscr{H}$(Ⓢ)中；

(3) 对于 $x\in$Ⓢ，$f\in\mathscr{H}$(Ⓢ)，有 $f(x)=(K_x,\ f)$。

定义 2.6 Hilbert 函数模$\mathscr{H}$(Ⓢ)叫做**有性质 P**，如果对于

Ⓢ中的每个 x，存在一个非负常数 $M(x)$，使得对于 $\mathscr{H}$ 中所有 f，有

$$|f(x)|\leqslant M(x)\|f\|_{\mathscr{H}}.$$

$\mathscr{H}$(Ⓢ)叫做**有性质 P′**，如果加之 $M(x)$ 在Ⓢ的紧子集上（作为 x 的一个函数）是有界的。

定理 2.10 $\mathscr{H}$(Ⓢ)有再生核的充要条件是 $\mathscr{H}$ 有性质 P。如果再生核存在，则必唯一。

定理的证明类似于 Hilbert 空间情形的证明。

定理 2.11 关于 Hilbert 函数模的再生核满足

$$K(x,\ y)=K(y,\ x)^*.$$

定理 2.12 如果 $\mathscr{H}$(Ⓢ)有再生核，则按 $\mathscr{H}$(Ⓢ)的范数收敛的数列是逐点收敛的。如果 $\mathscr{H}$(Ⓢ)有性质 P'，则在Ⓢ的相对紧子集上的收敛是一致的。

定义 2.7 假定 $f,\ g\in\mathscr{H}$(Ⓢ)，如果 $(f,g)=0$，则 f,g **是正交的**，集合 $\{\phi_n\}\subset\mathscr{H}$(Ⓢ)叫做正交的，如果它的元素成对地正交，并且对于每个 ϕ_n 都存在一个投影 $e_n\in\mathscr{A}$，使得

$$(\phi_n,\ \phi_n)=e_n,\quad \phi_n e_n=\phi_n.$$

定理 2.13 如果 $\mathscr{H}$ 是可分的，则对于 $\mathscr{H}$ 存在一个正交基 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$，换言之，对于 $\mathscr{H}$ 中的每一个 g 有表示式

$$g=\sum_n \Phi_n(\Phi_n,\ g),$$

这里的级数按照 $\mathscr{H}$ 的模收敛，并且

$$\|g\|^2_{\mathscr{H}}=\sum_n\|(\Phi_n,\ g)\|^2.$$

我们注意到 K_x 的 Fourier 系数是

$$(\Phi_n,\ K_x)=(K_x,\ \Phi_n)^*=\Phi_n(x)^*,$$

因此

$$(2.11) \qquad K_x = K(x, y) = \sum_n \Phi_n(y)\Phi_n(x)^*.$$

依照通常的情况，当在代数 $\mathscr{A}$ 中，$K(x, y)$ 可以逆转(invert)时，再生核能够表示成某些极值问题的解，我们用下列两个引理阐明这个可逆性问题。

引理 2.2 对于 $x \in Ⓢ$，$K(x, x)$ 是可逆的充要条件是对于 $\mathscr{H}(Ⓢ)$ 中某个 f，$f(x)$ 是可逆的。此外，如果 $a \in \mathscr{A}$，则 $a(Kx, x) = 0$，当且仅当对于 $\mathscr{H}(Ⓢ)$ 中的所有 f 有 $af(x) = 0$。

证 如果对 $\mathscr{H}(Ⓢ)$ 中所有 f，$af(x) = 0$。我们取特殊的 $f = K_x$，且可得 $aK_x(x) = aK(x,x) = 0$。反之，假设 $aK(x,x) = 0$，则有

$$(K_x a^*, K_x a^*) = a(K_x, K_x)a^* = aK(x,x)a^* = 0,$$

因之 $K_x a^* = 0$。另一方面，对于 $\mathscr{H}(Ⓢ)$ 中的 f，有

$$af(x) = a(K_x, f) = (K_x a^*, f) = (0, f) = 0.$$

引理的第一部分从引理的第二部分得出，还使用到：$f(x)$ 是可逆的充要条件是对于 $\mathscr{A}$ 中所有非零元素，有 $af \neq 0$ 这个结果。

引理 2.3 对于Ⓢ中的每一个 x 和 $\mathscr{H}(Ⓢ)$ 中的 f，存在 $\mathscr{A}$ 中的一个元素 a，使得 $f(x) = K(x, x)a$。

证 如果 $K(x, x)$ 是可逆的，则 $a = K^{-1}f(x)$，对于更一般的情况，我们从 $K(x, x) = (K_x, K_x)$ 可以看出 $K(x, x)$ 是正定的且有表示式

$$K(x, x) = \sum_i \lambda_i e_i,$$

此处，每个 λ_i 是正的并且 e_i's 是早先说明过的射影(Projection)。定义

$$e = I - \sum_i e_i \quad 和 \quad d = e + \sum_i (\lambda_i)^{-1} e_i,$$

我们可得

$$(\mathrm{K}(x,\ x)+e)d=I,\ (ed=de=e)$$

和 $\mathrm{K}=0$。对于 $\mathscr{H}(\mathbb{S})$中的 f，有

$$f(x)=(\mathrm{K}(x,x)+e)df(x)=\mathrm{K}(x,x)df(x)+ef(x).$$

但借助于引理(2.2)有 $ef=0$。它蕴含着具有 $a=df$ 的结果。

现在，我们介绍两个极值问题。**问题**Ⅰ是在服从边条件 $f(x)=b$（对于一个固定的 $x\in\mathbb{S}$）的条件下，对 $f\in\mathscr{H}(\mathbb{S})$去寻找极小值 $\|f\|_{\mathscr{H}}$。

问题Ⅱ是在服从边条件 $|f(x)|=1$（对于一个固定的 $x\in\mathbb{S}$）的条件下，对 $f\in\mathscr{H}(\mathbb{S})$去寻找极小值 $\|f\|_{\mathscr{H}}$。

定理2.14　如果 b 有表达式 $b=K(x,\ x)a$，则问题Ⅰ有唯一解 $g=\mathrm{K}_x a$。

证　我们将 g 写成形式 $g=\mathrm{K}_x a+h$，$h\in\mathscr{H}(\mathbb{S})$。从条件 $g=b$，可知 $b=\mathrm{K}(x,x)a+h$。因此，$h=0$。另外，$\|g\|^2=\mathrm{tr}(g,g)=\mathrm{tr}[(\mathrm{K}_x a,\ \mathrm{K}_x a)+a^*(\mathrm{K}_x,h)+(h,\ \mathrm{K}_x)a+(h,h)]$。因为$(\mathrm{K}_x,h)=h(x)=0$，所以 $\|g\|^2_{\mathscr{H}}=\|\mathrm{K}_x a\|^2_{\mathscr{H}}+\|h\|^2_{\mathscr{H}}$。当 $\|h\|_{\mathscr{H}}=0$，$h=0$ 时，这个量取极小，因之 $g=\mathrm{K}_t a$。

我们注意到，当 $\mathrm{K}(x,\ x)$ 是可逆时，问题Ⅰ有唯一解 $g=\mathrm{K}_x\mathrm{K}(x,\ x)^{-1}b$。此外，对于 b 是 $\mathscr{A}$ 的单位的特殊情况，有$(g,g)=\mathrm{K}(x,\ x)^{-1}(\mathrm{K}_x,\ \mathrm{K}_x)\mathrm{K}(x,\ x)^{-1}=\mathrm{K}(x,\ x)^{-1}$。因此，$\mathrm{K}_x=g\mathrm{K}(x,\ x)=g(g,\ g)^{-1}$。

定理2.15　如果 $\mathrm{K}(x,\ x)\neq 0$，则问题Ⅱ有一个解 g 的充要条件是它有表达式 $g=\mathrm{K}_x a$，此处，$a\in\mathscr{A}$，$a^*a=|\mathrm{K}(x,\ x)|^{-2}\mathrm{I}$。

证　如果 $f\in\mathscr{H}(\mathbb{S})$，$|f(x)|=1$，则由定理(2.8)，我们有

$$1=|f(x)|=|(\mathrm{K}_x,\ f)|\leqslant\|\mathrm{K}_x\|_{\mathscr{H}}\|f\|_{\mathscr{H}}$$

和 $\|f\|_{\mathscr{H}}\geqslant\|\mathrm{K}_x\|^{-1}_{\mathscr{H}}$。另外，当且仅当 $f=\mathrm{K}_x a$ 时，上面等号成立，这里 $a\in\mathscr{A}$，$a^*a=\mu I$，$\mu>0$（由于 a^*a 是正定的所以 μ 是正的）。因此，问题Ⅱ为形如 $g=\mathrm{K}_x a$ 的这些函数 g 所解答。这

$a^*a=\mu I$，$|g(x)|=1$。最后条件给出

$$1=|\mathrm{K}(x,\ x)a|=tr[(\mathrm{K}(x,\ x)aa^*\mathrm{K}(x,\ x))^{\frac{1}{2}}]$$

$$=\mu^{\frac{1}{2}}\mathrm{trK}(x,\ x)=\mu^{\frac{1}{2}}|\mathrm{K}(x,\ x)|,$$

因之，$\mu=|\mathrm{K}(x,\ x)|^{-2}$。

下面我们主要应用 Hilbert 模于函数理论，特别是，用它来研究 $\bar{\partial}f=0$ 的解。

众所周知，有限维 Clifford 代数有矩阵表达式，而且利用矩阵表示常常是有利的，为此，令 $A_2,\cdots,\ A_n$ 是具有复常数项的 $m\times n$ 矩阵。另外，假定这个矩阵满足

$$A_iA_j+A_jA_i=0,\ i\neq j,\ 2\leqslant i,\ j\leqslant n,$$

$$A_i^2=-I,\ 2\leqslant i<n,$$

此处 I 是恒等矩阵。我们考察偏微分方程

$$\bar{\partial}f=I\frac{\partial f}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+A_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0 \tag{2.12}$$

在 R^n 中的复矩阵解。令 $x=(x_1,\cdots,\ x_n)\in Ⓢ\subset R^n$，此处Ⓢ是一个区域，并且我们定义

$$|x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$x^*=x_1I+x_2A_2+\cdots+x_nA_n,$$

$$\bar{x}=x_1I-x_2A_2-\cdots-x_nA_n.$$

就象早先我们看到的，(2.12)的 $C^1(Ⓢ)$的解有一个 Cauchy 积分表达式，即对于 $x\inⓈ$，有

$$f(x)=\omega_n^{-1}\int_{\partial Ⓢ}(y-x)^{-n}(\overline{y-x})\nu^*(y)f(y)d\sigma(y), \tag{2.13}$$

此处 ν 是在Ⓢ上的外向点(outward-pointing)单位法向向量并且 ω_n 是 R^n 中单位球的表面积。

照解析函数的样子，我们能够利用表达式 (2.13) 去证明 (2.12) 解的一致极限也是 (2.12) 的一个解。

现在，令Ⓢ$\subset R^n$是一个固定的域，并且令$\mathscr{A}_n$是$m\times m$常数矩阵代数的具有单位的某个子代数，使得$\mathscr{A}_n$在对偶变换下是闭的。我们定义

$$\langle a, b\rangle = \mathrm{tr}ab^*, \quad a, b\in\mathscr{A}_n.$$

通常迹(trace)函数是正规化了的。因此$\mathrm{tr}I=1$。我们定义取值在$\mathscr{A}_n$中的内积为

$$(f, g)=\int_{Ⓢ} f^* g dx,$$

此处的f, g定义于Ⓢ中并取值于$\mathscr{A}_n$中。现在我们要求$\mathscr{H}$(Ⓢ)是(2.12)的C^1(Ⓢ)解的子族，取值在$\mathscr{A}_n$中，并且使得

$$\|f\|_{L^2(Ⓢ)} = \mathrm{tr}(f, f) = \mathrm{tr}\int_{Ⓢ} f^* f dx < \infty.$$

容易验证，早先关于 Hilbert 模给定的公理(a)－(j)关于子族$\mathscr{H}$(Ⓢ)成立。完备公理(K)需要证明。对于一个固定$x\in$Ⓢ，我们选取$B(x, \rho)\subset$Ⓢ为具有中心x和半径ρ的球。对曲面$B(x, \rho)$利用 Cauchy 表示(2.13)有

$$f(x)=\omega_n^{-1}\int_{|y-x|=\rho}\rho^{-n}(y-x)((y-x)^*/\rho)f(y)d\sigma(y).$$

利用(2.11)和共轭的定义，可得

$$\overline{(y-x)}(y-x)^* = |y-x|^2 I = \rho^2 I,$$

因此，

$$f(x)=\omega_n^{-1}\rho^{1-n}\int_{|y-x|=\rho} f(y)d\sigma(y).$$

这导出

$$f(x)=n\rho^{-n}\omega_n^{-1}\int_{|y-x|<\rho} f(y)dy.$$

我们记得，对于$a\in\mathscr{A}$，有$\|a\|_{\mathscr{H}} = (\mathrm{tr}(aa^*))^{\frac{1}{2}}$，$|a| = \mathrm{tr}(aa^*)^{\frac{1}{2}}$，$|a|\leqslant\|a\|_{\mathscr{H}}$，那么利用 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$|f(x)|\leqslant\|f(x)\|_{\mathscr{H}}\leqslant n\rho^{-n}\omega_n^{-1}\int_{|x-y|<\rho}\|f(y)\|_{\mathscr{H}}^{-1}dy$$

$$\leqslant n\rho^{-n}\omega_n^{-1}\left(\int_{|y-x|<\rho}dy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{|y-x|<\rho}\|f\|^2_{\mathscr{H}}dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant n\rho^{-n}\omega_n^{-1}(\omega_n\rho^n/n)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2,(\mathbb{S})}.$$

因此，我们有形如下的不等式

$$|f(x)|\leqslant CR_x^{-\frac{n}{2}}\|f\|_{L^2,(\mathbb{S})}, \tag{2.14}$$

此处 R_x 是从 x 到Ⓢ的距离。从（2.12）得出，在 $\mathscr{H}$(Ⓢ)中按范数收敛蕴含着在Ⓢ的紧子集上一致收敛，公理(K)则可直接得到，最后，（2.14）蕴含着 $\mathscr{H}$(Ⓢ)有一个再生核，并且公理(K)则蕴含着它有一个正交表示（2.11）。

五、Liouville's 定理

现在我们证明 Liouville's 定理的一个变形．为此引进

定义 2.8 点 ∞ 称为关于 $f(x)$ 的一个**正则点**，如果

（1）存在一个实数 $\varepsilon>0$，使得对于所有 $r\in(0,\ \varepsilon)$，$f(x/r)$ 关于适当选择的 a，b，$0<a<b<+\infty$，在开域 $\dot{B}(0,\ b)\backslash\bar{B}(0,\ a)$ 中是正则的；

（2）$\lim\limits_{r\to0}f(x/r)=f(\infty)$ 存在并且不依赖于 x。

定理 2.16 如果 f 在 $R^n\cup\{\infty\}$ 中左正则，那么 f 是一个常数。

证 取 x 为 R^n 中的任意固定的一个点，并且选取 $\varepsilon>0$ 充分小，使得 $\|x\|<\frac{1}{\varepsilon}$，则从 Cauchy 公式，对于 $x\in\dot{B}(0,\ 1/r)$，$0<r<\varepsilon$，有

$$f(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\dot{B}(1/r)}\frac{\bar{t}-\bar{x}}{\rho^n}d\sigma_t f(t).$$

因为积分值不依赖于 r，所以，如果

$$\lim_{r\to 0}\int_{\dot B(1/r)}\frac{\bar t-\bar x}{\rho^n}d\sigma_t f(t)$$

存在，则它等于 $f(z)$。为证明这个极限确实存在我们首先引进超球面坐标

$$\begin{aligned}\zeta_1&=\tau\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-1},\\ \zeta_2&=\tau\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1},\\ &\vdots\\ \zeta_{n-1}&=\tau\cos\theta_1\sin\theta_2,\\ \zeta_n&=\tau\sin\theta_1,\end{aligned}$$

此处 $0\leqslant\theta_{n-1}\leqslant 2\pi$，并且 $\frac{-\pi}{2}\leqslant\theta_i\leqslant\frac{\pi}{2}$，$i=1,\cdots,n-2$。引进一个积分参变量 $\zeta=\zeta'/r$，经过一个简单的计算，有

$$f(z)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\dot B(1)}\frac{\bar t-\bar x r d\sigma_t'}{\left(\sum_{a=1}^{n}(t_a'-rx_a)^2\right)^{\frac{n}{2}}}f\left(\frac{t'}{r}\right).$$

因为 $\lim_{r\to 0}f(t'/r)=f(\infty)$ 存在，在积分号下取极限，可得

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\omega_r}\int_{\dot B(1)}\frac{\bar t'-\bar x'}{\left(\sum_{a=1}^{n}(t_a'-x_a')^2\right)^{\frac{n}{2}}}d\sigma_t' f(t'/r)$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\left(\int_{\dot B(1)}\cos^{n-2}\theta_1\cos^{n-3}\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2}d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1}\right)f(\infty)$$

$$=f(\infty).$$

因为 $f(x)$ 处处等于 $f(\infty)$，所以 $f(x)$ 是常数。

§3 R^n 中的广义正则函数

在这节里，我们通过研究关于方程

$$(3.1)\qquad \bar{\partial} w-\sum_{A} C_{A}(x) H_{A} W(x)=F(x)$$

的解，考察正则函数的一般化问题，此处，$C_A(x)$是超复值函数，并且，H_A 是定义如下的一个变换。令 $H_i(2\leqslant i\leqslant n)$ 是一个到自身的线性映射，这个映射使 $e_i\to -e_i$，但对于 $j\neq i$，让 e_j 固定，则我们定义

$$H_A=H_{\alpha_1}\cdots H_{\alpha_p},\quad A=\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_p\},$$

此处 $2\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_p\leqslant n$。此外，我们还假定 $C_A(x)\in L^p(\circledS)$。

通常，当 $\forall\phi\in C_0^\infty(\circledS)$，有

$$\int_{\circledS}\Big[(\phi\bar{\partial})w+\phi\sum_{A} C_A H_A w+\phi F\Big]dx=0$$

时，我们称 w 是(3.1)的**弱解**。对于 w 和 $v\in C^1(\circledS)$，由 Green 定理有

$$\int_{\circledS}(v\bar{\partial})\,wdx+\int_{\circledS} v\bar{\partial}wdx=\int_{\dot{\circledS}} vd\sigma w,$$

由此

$$\int_{\circledS}\Big[\Big((v\bar{\partial})w+v\sum_{A} C_A H_A w\Big)+\Big(v\bar{\partial}w-v\sum_{A} C_A H_A w\Big)\Big]dx$$

$$=\int_{\dot{\circledS}} vd\sigma w.$$

符号 $\mathrm{Re}(a)$表示 e_1（或 1)的系数，则我们从 H_A 的定义，有

$$\mathrm{Re}\int_{\circledS} v(C_A H_A w)\,dx=\mathrm{Re}\int_{\circledS} H_A(vC_A)wdx.$$

于是

$$\mathrm{Re}\int_{\circledS}\Big[\Big(v\bar{\partial}+\sum_{A} H_A\ (vC_A)\Big)w+v\Big(\bar{\partial}w-\sum_{A} C_A H_A w\Big)\Big]dx$$

$$=\mathrm{Re}\int_{\dot{\circledS}} vd\sigma w.$$

如果我们对于函数引进一个在代数$\mathscr{A}_n$中取值的内积为

$$\langle f, g\rangle = \mathrm{Re}\int_{(S)} \bar{f} g dx$$

[对超复数$a = \sum a_{\alpha_1\cdots\alpha_k} e_{\alpha_1}\cdots e_{\alpha_k}$，我们定义$\bar{a} = \sum a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}(-1)^k e_{\alpha_k}\cdots e_{\alpha_1}$]，那么微分方程（3.1）的形式共轭看作是

$$v\bar{\partial} + \sum_A H_A(vC_A) = F. \tag{3.2}$$

此外，显然，当且仅当

$$\mathrm{Re}\int_{(S)}\left[\left((\phi\bar{\partial}) + \sum_A H_A(\phi C_A)\right)w + \phi F\right]dx = 0,\ \forall\phi\in C_0^\infty((S))$$

时，w是（3.1）的弱解。

应用算子

$$J_{\circledS} f = \frac{-1}{\omega_n}\int_{(S)} f(\zeta)\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta - z|^n}d\zeta$$

到方程（3.1）的左边，再构造算子

$$Mw = w - J_{\circledS}\left(\sum_A C_A H_A w\right),$$

如果在Ⓢ的外部，我们假定$C_A = 0$，那么在R^n中我们可以研究那个算子，下面我们用J来简写$J_{\circledS}$. 利用上面给定的内积$\langle,\rangle$的定义，经过计算可知算子M的形式共轭由

$$M^* v = v - \sum_A H_A(\bar{C}_A J^* v)$$

给定，此处

$$J^* f = \frac{1}{\omega_n}\int_{(S)} f(\zeta)\frac{\zeta - z}{|\zeta - z|^n}d\zeta.$$

而对于微分方程（3.1），则对应于一个积分方程

(3.3)
$$Mw = F_1,$$
$$F_1(x) = JF(x) + \frac{1}{\omega_n}\int_{\dot{\mathfrak{S}}} \frac{\bar{t}-\bar{x}}{|t-x|^n} d\sigma_t w(t) = JF(x) + \phi(x).$$

微分方程（3.2）对应的共轭积分方程则是
$$M^* v = v - \sum_A H_A(\bar{C}_A J^* v) = F_2.$$

为了进一步研究这些算子方程，我们需要介绍算子的一些性质。

定理 3.1 如果 $F \subset R^n$ 是一个域，并且 $v \in L^1(\mathfrak{S})$，则 $J\beta v \in L^1_{1,c}(g)$，且
$$v = \bar{\partial}(J_{\mathfrak{S}} v)\,(弱).$$

证 设 $\mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}$ 是一个有界域，且以 $\chi_{\mathfrak{S}_0}$ 表示它的特征函数，则
$$\int_{\mathfrak{S}}\left\{\int_{\mathfrak{S}} \chi_{\mathfrak{S}_0}(x)\frac{1}{|t-x|^{n-1}}dx\right\}|v(t)|dt$$
$$= \int_{\mathfrak{S}}\left\{\int_{\mathfrak{S}_0} \frac{1}{|t-x|^{n-1}}dx\right\}|v(t)|dt$$
$$\leqslant M(n, \mathfrak{S}_0)\int_{\mathfrak{S}}|v(t)|dt$$
$$= M((n, \mathfrak{S}_0)|v, \mathfrak{S}|_1.$$

利用 Fubini 定理，有
$$\int_{\mathfrak{S}}\left\{\int_{\mathfrak{S}_0} \chi_{\mathfrak{S}_0}(x)\frac{\bar{t}-\bar{x}}{|t-x|^n}dx\right\}v(t)dt$$
$$= \int_{\mathfrak{S}} \chi_{\mathfrak{S}_0}(x)\left\{\int_{\mathfrak{S}} \frac{\bar{t}-\bar{x}}{|t-x|^n}v(t)dx\right\}dx$$
$$= \frac{-1}{\omega_n}\int_{\mathfrak{S}_0} J_{\mathfrak{S}_0} v(x)dx.$$

因此，$J_{\mathfrak{S}} v \in L^1_{1,c}(\mathfrak{S})$。

为完成这个证明，我们利用 Cauchy-Pompieu 表示式有

$$\int_{\mathfrak{G}} \phi(x) v(x) dx =$$

$$= \int_{\mathfrak{G}} \left\{ -\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathfrak{G}} (\phi\bar{\partial})(t) \frac{\bar{t}-\bar{x}}{|t-x|^n} dt \right\} v(x) dx$$

$$= \int_{\mathfrak{G}} (\phi\bar{\partial})(t) \left\{ \frac{-1}{\omega_N} \int_{\mathfrak{G}} \frac{\bar{t}-\bar{x}}{|t-x|^n} v(x) dx \right\} dt$$

$$= -\int_{\mathfrak{G}} (\phi\bar{\partial})(t) (J_{\mathfrak{G}} v)(t) dt.$$

其中 $\phi \in C_c^{\infty}(\mathfrak{G})$。因为

$$\int_{\mathfrak{G}} \left\{ \int_{\mathfrak{G}} |\phi\bar{\partial})(t)| \frac{1}{|t-x|^{n-1}} dt \right\} |v(t)| dx$$

$$= \int_{\mathfrak{G}} |v(x)| \left\{ \int_{supp\phi} \frac{|(\phi\bar{\partial})(t)|}{|t-x|^{n-1}} dt \right\} dx$$

$$\leqslant M(n, \phi) |v, \mathfrak{G}|_1,$$

所以，根据积分法，上面的变形是允许的。

推论 3.1 令 $G \subset R^n$ 是一个域，$v \in L_1(\mathfrak{G})$，$w \in L^1_{1\,c}(\mathfrak{G})$，并且在 $\mathfrak{G}$ 中满足 $v = \bar{\partial} w$（弱），则在 $\mathfrak{G}$ 中

$$w = \psi + J_{\mathfrak{G}} v,$$

这里 ψ 是左正则函数。

反之，如果 ψ 在 $\mathfrak{G}$ 中左正则且 $v \in L^1(\mathfrak{G})$，则 $\psi + J_{\mathfrak{G}}$ 在 $L^1_{1\,c}(\mathfrak{G})$ 中，并且

$$\bar{\partial}(\psi + J_{\mathfrak{G}} v) = v.$$

证 如果 $v \in L^1(\mathfrak{G})$，则由上面的定理，$J_{\mathfrak{G}} v \in L^1_{1\,c}(\mathfrak{G})$。同样地，从上面的定理可得，对于 $w \in L^1_{1\,c}(\mathfrak{G})$ 和 $v = \bar{\partial} w$（弱），有

$$\bar{\partial}(w - J_{\mathfrak{G}} v) = v - v = 0.$$

再由推论 2.1 可知，$\psi = w - J_{\mathfrak{G}} v$ 在 $\mathfrak{G}$ 中左正则，

相反的结论，直接地从上面定理可得。

定义 3.1 对于每个 x，$t\in R^n$，$n\geqslant 2$ 和 $v\geqslant 0$，定义

$$P_\nu(x,\ t)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{\nu}|x|^{\nu-k}|t|^k=\dfrac{|x|^{\nu+1}-|t|^{\nu+1}}{|x|-|t|}(|x|\neq|t|), & \nu\neq 0,\\ 1, & \nu=0.\end{cases}$$

引理 3.1 对于非零的 $t,x\in R^n,n\geqslant 2$，$v\geqslant 0$，有

$$\left|\frac{x}{|x|^{\nu+2}}-\frac{t}{|t|^{\nu+2}}\right|\leqslant\frac{P_\nu(x,t)}{|x|^{\nu+1}|t|^{\nu+1}}|x-t|.$$

证 经过平方和展开左边的项，我们得到

$$\left|\frac{z}{|z|^{\nu+2}}-\frac{t}{|t|^{\nu+2}}\right|-\frac{|z|z|^\nu-t|t|^\nu|}{|z|^{\nu+1}|t|^{\nu+1}}.$$

因此，如果我们能够证明

(3.4) $$|x|x|^\nu-t|t|^\nu|\leqslant P_\nu(x,\ t)|x-t|,$$

则我们将完成证明．为此，我们注意到，如果 t 或 x 是零，或者如果 $|t|=|x|$，则这个结果是明显的．因之，设 t，$x\neq 0$ 且 $|t|\neq|x|$，则上式等价于

$$|x|x^\nu|-t|t|^\nu|^2\leqslant P_\nu^2|x-t|^2,$$

或者

$$P_\nu^2(|x|-|t|)^2+|x|^\nu|t|^\nu(2|x||t|-t\bar{x}-x\bar{t})\leqslant P_\nu^2|x-t|^2,$$

或者

$$|x|^\nu|t|^\nu(2|x||t|-t\bar{x}-x\bar{t})\leqslant P_\nu^2(|x-t|^2-(|x|-|t|)^2).$$

但是

$$0\leqslant|x-t|^2-(|x|-|t|)^2=2|x||t|-t\bar{x}-x\bar{t},$$

因此 (3.4) 等价于

$$|x|^\nu|t|^\nu\leqslant P_\nu^2(x,\ t)=|x|^\nu|t|^\nu+\cdots,$$

于是可得我们的结果．

引理 3.2 (Hadamard)设 $(S)\subset R^n$ 是一个有界域，$n\geqslant 2$，且令 α，β 满足 $0<\alpha$，$\beta<n$，$\alpha+\beta>n$，则对于所有 x_1，$x_2\in R^n$，

$x_1 \neq x_2$，有

$$\int_{\circledS}|t-x_1|^{-\alpha}|t-x_2|^{-\beta}dt \leqslant M(\alpha, \beta)|x_1-x_2|^{n-\alpha-\beta}.$$

定理 3.2 设 $\circledS \subset R^n$ 是一个有界域，$v \in L^p(\circledS)$，$n<p<\infty$，则 $w = J_{\circledS} v$ 在 $B^{0,\alpha}(R^n)$ 中 [$B^{0,\alpha}(R^n)$ 是 R^n 中 Hölder 连续的函数空间]，此处 $\alpha=(p-n)/p$。另外，由此可得

(1) $|w(x)| \leqslant M(n, p, \circledS)|v, \circledS|_p$，$x \in R^n$；

(2) 对于 x_1，$x_2 \in R^n$ 有

$$|w(x_1)-w(x_2)| \leqslant M(n, p)|v, \circledS|_p |x_1-x_2|^{\alpha}.$$

证 设 p' 适合 $(1/p)+(1/p')=1$，则

$$|w(x)| = \left|\frac{-1}{\omega_n}\int_{\circledS}\frac{\bar{t}-\bar{x}}{|t-x|^n}v(t)dt\right| \leqslant M(n)\int_{\circledS}\frac{|v(t)|dt}{|t-x|^{n-1}}$$

$$\leqslant M(n)|v, \circledS|_p\left(\int_{\circledS}|t-x|^{(1-n)p'}dt\right)^{1/p'}.$$

当 $n<p<\infty$ 时，有 $1<p'<n/(n-1)$，和 $n-1<(n-1)p'<n$。因此，对所有 $x \in R^n$，有

$$\int_{\circledS}|t-x|^{(1-n)p'}dt \leqslant M(n, p', \circledS),$$

这就证明了(1)。

为了证明(2)，我们首先注意到

$$|w(x_1)-w(x_2)| \leqslant M(n)\int_{\circledS}\left|\frac{\bar{t}-\bar{x}_1}{|t-x_1|^n}-\frac{\bar{t}-\bar{x}_2}{|t-x_1|^n}\right||v(t)|dt,$$

再利用引理 3.2 有

$$|w(x_1)-w(x_2)| \leqslant$$

$$\leqslant M(n)\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\circledS}\frac{|x_1-x_2|}{|t-x_1|^k|t-x_2|^{n-k}}|v(t)|dt$$

$$\leqslant M(n)|x_1 \cdots x_2||v, \circledS|_p\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\int_{\circledS}|t-x_1|^{-kq}|t-x_2|^{-(n-k)q}dt\right\}^{1/p},$$

对于 $1\leqslant k\leqslant n-1$，有 $0<kq<kn/(n+1)<n$ 和 $kq+(n-k)q=np>n$，于是由引理 3.2 可知，

$$\int_{\circledS}|t-x_1|^{-kq}|t-x_2|^{-(n-k)q}dt\leqslant M(q)|x_1-x_2|^{n(1-q)},$$

将此式代入上式，即可得(2)。

从后面将要证明的正则性定理明显可见，算子 $J_{\circledS}$ 即便在 $L^2(\circledS)$ 上是紧的，也不会正好在 $L^p(\circledS)$，$n<p<\infty$ 上是紧的。因此，我们能够应用紧算子的 Fredholm 定理断定齐次方程 $Mw=0$ 和 $M^*w=0$ 至多有有限多个线性无关解。如果 $\{w_1,\cdots,w_N\}$ 是 M 的零空间的基底，并且 $\{v_1,\cdots,v_{N'}\}$ 是 M^* 的零空间的基底，则借助于 Fredholm 的二择一定理，有 $N=N'$。另外，如果基底函数是关于 $<,>$ 的正交化的基底，即

$$\langle w_i,\ w_j\rangle=\langle v_i,\ v_j\rangle=\delta_{ij},$$

那么，(3.3)可解的充要条件是

$$\langle F_1,\ v_k\rangle=0(k=1,\ \cdots,\ N),$$

并且 (3.3) 的共轭积分方程是可解的充要条件为

$$\langle F_2,\ w_k\rangle=0,\ (k=1,\ \cdots,\ N)$$

按照通常的做法，我们去构造新的积分方程

$$M_1w=Mw+\sum_{k=1}^{N}\langle w,\ w_k\rangle v_k=F_1.$$

再对 v_i 取数量积，可得

$$\langle v_i,\ M_1w\rangle=\langle v_i,\ Mw\rangle+\sum_{k=1}^{N}\langle w,\ w_k\rangle\langle v_i,\ v_k\rangle$$

$$=\langle w,\ w_i\rangle=\langle v_i,\ F_1\rangle.$$

因之，由此可得齐次方程 $M_1w=0$ 的解是唯一的，因为在这个情况下，对于每个解 w，有

$$\langle w,\ w_i\rangle=\langle v_k,0\rangle=0.$$

从 Fredholm 理论可知，存在一个予解核 $\Gamma_A(x, t)$ 使得每当有一个正则函数 Φ（即 $\bar{\partial}\Phi=0$），$\Phi\in C^0(\bar{\mathbb{S}})\cap C^1(\mathbb{S})$ 适合 $\langle F_1, v_k\rangle=0$，$(k=1, \cdots, N)$，$F_1=JF+\Phi$，那么方程 (3.3) 的解能够表示成

$$w(x)=R(F_1)+\sum_{k=1}^{N} d_k w_k,$$

$$R(F_1)(x)=F_1(x)+\sum_A \int_{R^n} \Gamma_A(x, t) H_A F_1(t) dt,$$

此处 d_k 全部都是实常数。

在 Fredbolm 理论中，予解核通常满足一个积分方程。在此我们有

$$\begin{aligned}
F_1=M_1(RF_1)&=RF_1+\int_{R^n} K(\xi, x)\sum_A C_A(\xi) H_A(RF_1)(\xi) d\xi \\
&\quad+\sum_{k=1}^{N}\langle v_k, F_1\rangle v_k(x) \\
&=F_1(x)+\sum_B \int_{R^n} \Gamma_B(x, t) H_B F_1(t) dt \\
&\quad+\int_{R^n} K(\xi, x)\sum_A C_A(\xi) H_A F_1(\xi) d\xi \\
&\quad+\int_{R^n} K(\xi, x)\sum_A C_A(\xi) H_A\left[\sum_B \int_{R^n} \Gamma_B(\xi, t) H_B F_1(t) dt\right] d\xi \\
&\quad+\sum_{k=1}^{N}\langle v_k, F_1\rangle v_k(x).
\end{aligned}$$

交换求和的次序并且利用记号

$$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(A\cup B)\backslash(A\cap B),$$

在重新命名求和下标之后，我们得到

$$\sum_B \int_{R^n} \Big\{ \Gamma_B(x,\ t) + K(t,\ x) C_B(t) +$$

$$+ \int_{R^n} \Big(\sum_A K(\xi,\ x) C_{A\lrcorner B}(\xi) H_{A\lrcorner B} \Gamma_A(\xi,\ t) \Big) d\xi \Big\} H_B F_1(t) dt$$

$$+ \sum_{k=1}^N \langle v_k,\ F_1 \rangle v_k(x) = 0. \tag{3.5}$$

由于 $F_1(t)$ 是任意的，ϕ同样是任意的，所以我们研究形如 $e_c\phi(t)$ 的 $F_1(t)$，这里 ϕ 是一个实值函数。因为我们的方程是线性的，所以将会看出，我们这样做并不失去一般性，那个内积的项则能够展开成

$$\langle v_k,\ F_1 \rangle v_k(x) = \mathrm{Re} \int_{R^n} \overline{v_k(t)}\, e_c \phi(t)\, dt\, v_k(x) =$$

$$= \int_{R^n} \mathrm{Re}(\overline{v_k(t) e_c}) v_k(x) \phi(t) dt.$$

将上式代入 (3.5)，并且考虑到 $\phi(t)$的任意性，就能得出 $\phi(t)$ 的系数必须恒为零的结论，即

$$\sum_B \Big[\Gamma_B(x,\ t) + K(t,\ x) C_B(t) + \sum_A \int_{R^n} K(\xi,\ x) C_{A\lrcorner B}(\xi) H_{A\lrcorner B}$$

$$\times \Gamma_A(\xi,\ t) d\xi \Big] H_B e_c + \sum_{K=1}^N \mathrm{Re}(\bar{e}_c v_k(t)) v_k(z) = 0.$$

上面的方程组看作关于方括号项的代数方程组是可解的，即

$$\Gamma_B(x, t) + K(t, x) C_B(t) + \sum_A \int_{R^n} K(\xi, x) C_{A\lrcorner B}(\xi) H_{A\lrcorner B} \Gamma_A(\xi, t) d\xi$$

$$= -2^{-n} \sum_{k=1}^N v_k(x) H_B(\overline{v_k(t)}). \tag{3.6}$$

M_1 的共轭算子可以写成如下形式

$$M_1^* v = M^* v + \sum_{k=1}^{N} \langle v,\ v_k \rangle w_k$$

$$= v + \sum_A H_A\left(\overline{C}_A \int_{R^n} K(x,\ \xi) v(\xi) d\xi\right) + \sum_{k=1}^{N} \langle v,\ v_k \rangle w_k.$$

同上，还可以得到关于 M_1^* 的予解式 R^* 的表示式，即

$$R^* F_2 x) = F_2(x) + \sum_A \int_{R^n} H_A \Gamma_A(t,\ x) H_A F_2(t) dt.$$

恒等式 $M_1^*(R^*,\ F_2) = F_2$，则导致以下展开式

$$0 = \sum_B \int_{R^n} H_B \overline{\Gamma_B(t,\ x)} H_B F_2(t) dt$$

$$+ \sum_A H_A \left[\overline{C_A(x)} \int_{R^n} \overline{K(x,\ \xi)} F_2(\xi) d\xi \right]$$

$$+ \sum_A H_A \left[\overline{C_A(x)} \int_{R^n} \overline{K(x,\ \xi)} \right.$$

$$\left. \times \sum_A \int_{R^n} H_B \overline{\Gamma_B(t,\ \xi)} H_B F_2(t) dt d\xi \right]$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \langle F_2,\ w_k \rangle w_k(x).$$

并且，同上法我们能够交换和数的次序，同时解关于方括号的项

$$H_B \overline{\Gamma_B(t,x)} + H_B (\overline{C_B(x) K(x,t)}) + \sum_A \int_{R^n} H_A (\overline{C_A(x)}\ \overline{K(x,\xi)})$$

$$\times H_B\ \overline{\Gamma_{A\ B}(t,\ \xi)}\ d\xi = -2^{-n} \sum_{k=1}^{N} w_k(x) H_B \overline{w_k(t)}$$

或者

$$\overline{\Gamma_B(t,\ x)}+\overline{C_B(x)}\ \overline{K(x,\ t)}+\sum_A\int_{R^n}H_{A\Delta B}(\overline{C_A(x)}\ \overline{K(x,\xi)})$$

$$\times\overline{\Gamma_{A\Delta B}(t,\xi)}\,d\xi=-2^{-n}\sum_{k=1}^N H_B(w_k(x))\,\overline{w_k(t)}$$

它和

$$\Gamma_B(x,t)+K(t,x)C_B(t)+\sum_A\int_{R^n}\Gamma_{A\Delta B}(x,\xi)H_{A\Delta B}(K(t,\xi)C_A(t))d\xi$$

$$=-2^{-n}\sum_{K=1}^N W_K(x)H_B(\overline{W_K(t)})$$

是相同的

依据 Vekua 型核，还可以得到关于微分方程（3.1）的类 $C^0(\overline{(S)})$ 的解的一个一般的 Cauchy 表示式

$$w(x)=\sum_A\int_{\dot{\circledS}}\Omega_A(x,\ t)H_A(d\sigma_t w(t))+\sum_{K=1}^N d_K w_K(x),$$

此处 $d_K=\langle w,\ w_K\rangle$。一般 Cauchy（Vekua 型）核定义为

$$\Omega_A(x,\ t)=\begin{cases}K(t,\ x)+\int_{R^n}\Gamma_\varnothing(x,\ \xi)K(t,\ \xi)d\xi, & A=\varnothing,\\ \int_{R^n}\Gamma_A(x,\ \xi)H_A K(t,\ \xi)d\xi, & A\neq\varnothing.\end{cases}$$

为了得到关于核 Ω_A 的积分方程，我们以 $H_B K(\xi,\ t)$ 乘（3.6）的右边，并且关于参数 t 积分，得到

$$\int_{R^n}\Gamma_B(x,\ t)H_B K(\xi,\ t)dt+\int_{R^n}K(t,\ x)C_B(t)H_B K(\xi,\ t)dt$$

$$+\sum_A\int_{R^n}K(\eta,\ x)C_{A\Delta B}(\eta)\int_{R^n}H_{A\Delta B}\Gamma_A(\eta,\ t)H_B K(\xi,\ t)dtd\eta$$

$$= -2^{n}\int_{R^n}\sum_{K=1}^{N} v_K(x) H_B(\overline{v_K(t)}) H_B K(\xi,\ t)dt.$$

用 C 代替下标 $A\Delta B$，并且关于 C 求和，我们能够用

$$\int_{R^n}\Gamma_B(x,\ t)H_BK(\xi,\ t)dt+\int_{R^n}K(t,\ x)C_B(t)\Big[H_BK(\xi,\ t)dt$$

$$+\int_{R^n}H_B\Gamma_\phi(t,\ \eta)H_BK(\xi,\eta)d\eta\Big]dt+\sum_{C\neq B}\int_{R^n}K(\eta,x)C_C(\eta)\int_{R_n}$$

$$\times H_CH_{B_C}(\eta,\ t)H_CH_{B_C}K(\xi,\ t)dtd\eta$$

$$= -2^{-n}\sum_{K=1}^{N}\int_{R^n} v_K(x)H_B(\overline{v_K(t)}\,K(\xi,\ t))dt$$

来代替这个积分．再使用符合

$$\delta(B)=\begin{cases}1, & B=\varnothing,\\ 0, & B\neq\varnothing,\end{cases}$$

可以得到关于核 Ω_A 的积分方程

$$\Omega_B(x,t)-\delta(B)K(t,x)+\sum_A\int_{R^n}K(\xi,\ x)C_A(\xi)H_A\Omega_{A\Delta B}(\xi,\ t)d\xi$$

$$= -2^{-n}\sum_{K=1}^{N}v_K(x)\int_{R^n}H_B(\overline{v_K(\xi)})K(t,\ \xi)d\xi. \tag{3.7}$$

按照类似的方法，我们能以 $H_BK(\eta,\ t)$ 乘其右边并且对于 t 积分得到另外一个关于 Ω_B 的积分方程

$$\Omega_B(x,t)-\delta(B)K(t,x)+\sum_A\int_{R^n}\Omega_A(x,\eta)H_AC_{A\Delta B}(\eta)H_BK(t,\ \eta)d\eta$$

$$= -2^{-n}\sum_{K=1}^{N}w_K(x)\int_{R^n}H_B(\overline{w_K(\eta)})K(t,\ \eta)d\eta.$$

从上面的 Hadamard 估值和 (3.7) 可得知，对于 $(x,\ t)$

$\in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$有形如

$$|\Omega_B(x,\ t) - \delta(B)K(t,\ x)| \leqslant \frac{C}{|x-t|^{n+\alpha-1}}$$

的一个估计，此处 $\alpha = (n/p) - 1$。

为了证明广义 Cauchy 核有适当的剩余 (residue)。我们利用 Green 定理于域 $\mathfrak{S}_\varepsilon = \mathfrak{S} \backslash \{t;\ |t-x| \leqslant \varepsilon\}$，设 $v = -H_B\Omega_B(x,\ t)$ 并且 w 为微分方程的一个连续解，即

$$\int_{\dot{\mathfrak{S}}_\varepsilon} H_B(\Omega_B(x,\ t))d\sigma_t w(t) =$$

$$= \int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} ((H_B\Omega_B(x,\ t)\bar{\partial})\,w(t)dt + \int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} H_B(\Omega_B(x,\ t)\bar{\partial}w(t)dt$$

$$= -\int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} \sum_A H_B(\Omega_A(x,\ t))H_{A.B}C_{A\ B}(t)w(t)dt$$

$$-2^{-n}\sum_{K=1}^{N} H_B(w_K(x))\int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} \overline{w_K(t)}\,w(t)dt$$

$$+\int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} H_B(\Omega_B(x,\ t)\sum_A C_A(t)H_A w(t)dt$$

的一个连续解。应用 H_B 于这个方程，并且在 B 上求和，得出

$$-\sum_A\sum_B\int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} \Omega_A(x,\ t)H_A C_{A\lrcorner B}(t)H_B w(t)dt$$

$$+\sum_A\sum_B\int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} \Omega_B(x,\ t)H_B(C_A(t))H_{A\lrcorner B}w(t)dt$$

$$-2^{-n}\sum_{K=1}^{N} w_K(x)\sum_B H_B\int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} \overline{w_K(t)}\,w(t)dt$$

$$= \sum_B\int_{\dot{\mathfrak{S}}_\varepsilon} \Omega_B(x,\ t)H_B(d\sigma_t w(t)).$$

通过在第二个积分中以 $A\Delta B=C$ 代替并且在 C 上代替求和，我们注意到这取消了第一个积分再利用恒等式。最后，简化我们的方程成为形式

$$\sum_{K=1}^{N} w_K(x)\operatorname{Re}\int_{\circledast\varepsilon} \overline{w_K(t)}\, w(t)dt+\int_{\dot{\circledast}\varepsilon} \sum_{B}\Omega_B(x,t)H_B(d\sigma_t w(t))$$

$$=0.$$

$\Omega_B(x,\ t)$ 的局部性态导出表示式

$$w(x)=\sum_B\int_{\dot{\circledast}} \Omega_B(x,\ t)H_B(d\sigma_t w(t))+\sum_{K=1}^{N}\langle w_K,\ w\rangle w_K(x).$$

我们注意到：由于方程的共轭特征，按照积分方程 (3.7) 去构造广义 Cauchy 核是十分困难的。为了分解这个组，我们以元素 e_D 乘这个组，又以 H_B 作用乘积，并且关于 B 求和。在做了某些处理以后，便得到关于单个未知量

$\psi_D(x,\ t)=\sum_A H_A(e_D\Omega_A(x,\ t))$ 的积分方程，即

$$\psi_D(x,\ t)-e_D K(t,\ x)+\sum_E\int_{R^n} H_E(\psi_D(x,\ \eta)C_E(\eta))K(t,\ \eta)d\eta$$

$$=-\sum_{K=1}^{N}\operatorname{Re}(e_D w_K(x))\int_{R^n}\overline{w_K(\eta)}K(t,\ \eta)d\eta.$$

为了证明关于解 (3.1) 的某些正则性定理，首先我们建立对应于奇异积分的某些结果，为此我们给出：

定义 3.2 假定 Δ_n 是 R^n 中的单位球面，并且

$$w^{(\nu)}(x)=|x|^{-\nu}w(1/x),\ x\in\Delta_N.$$

如果 $|w|$，$|w^{(\nu)}|\in L^p(\Delta_n)$，则称 $w\in L^{p,\nu}(R^n)$，并以 $|w|_{p,\nu}=|w,\Delta_n|_p+|w^{(\nu)},\ \Delta_n|_p$ 来定义这个空间中元素的范数。

定理 3.3 如果 $v\in L^{p,n}(R^n)$，$n<p<\infty$，则函数 $w=Jv=$

$J_{k^n}v\in B^{0,\alpha}(R^n)$，此处 $\alpha=(p-n)/p$，并且 w 满足

(1) $|w(x)|\leqslant M(n,\ p)|v|_{p,n}$；

(2) $|w(x_1)-w(x_2)|\leqslant M(n,\ p)|v|_{p,n}|x_1-x_2|^\alpha$；

(3) 对于任意的 $a>1$，存在一个常数 $M(n,\ p,\ a)$，使得对于 $|x|\geqslant a$，有

$$|w(x)|\leqslant M(n,\ p,\ a)|v|_{p,n}|x|^{n/p-(n-1)},$$

(4) $v=\partial w$（弱）（在 R^n 中）。

证 我们记

$$w(x)=\frac{-1}{\omega_n}\int_{\Delta_n}\frac{\bar{t}-\bar{x}}{|t-x|^n}v(t)dt$$

$$-\frac{1}{\omega_n}\int_{\Delta_n}\frac{1/\bar{t}-\bar{x}}{|1/t-x|^n}v(1/t)\frac{1}{|t|^n}dt$$

$$=\tilde{w}(x)+\tilde{w}(x).$$

由定理（3.2），有

$$|\tilde{w}(x)|\leqslant M(n,\ p)|v,\ \Delta_n|_p.$$

对于 $\tilde{w}(x)$，可得

$$|\tilde{w}(x)|\leqslant M(n)\int_{\Delta_n}\frac{|v(1/t)|}{|1/t-x|^{n-1}}\frac{1}{|t|^{2n}}dt$$

$$\leqslant M(n)|v^{(n)},\ \Delta_n|_p(I(x))^{1/p'},$$

此处

$$I(x)=\int_{\Delta_n}|t|^{-np'}\left|\frac{1}{t}-x\right|^{-(n-1)p'}dt.$$

以下分两种情形讨论 $I(x)$：

(a) 当 $|x|\geqslant 1/2$ 时，我们有

$$I(x)\leqslant|x|^{(1-n)p'}\int_{\Delta_n}|t|^{-p'}\left|t-\frac{1}{x}\right|^{(1-n)p'}dt.$$

因为由 $n<p<\infty$，$1<p'<n/(n-1)$，可得 $(n-1)p'<n$，$p'+(n-1)p'=np'>n$，所以能够应用引理（3.2）得到

$$I(x)\leqslant|x|^{(1-n)p'}M(p,\ n)\left|\frac{1}{x}\right|^{n-p'-p'(n-1)}$$

$$=M(p,\ n)|x|^{p'-n}=M(p,\ n)2^{n-p'}.$$

(b) 当 $|x|<1/2$ 时，因为 $|t|\leqslant1$，$|x|<1/2$，
所以

$$|1-tx|\geqslant|1-|t||x||>1/2.$$

因此

$$I(x)=\int_{\Delta_n}|t|^{-p'}|1-tx|^{-(n-1)p'}dt\leqslant2^{(n-1)p'}\int_{\Delta_n}|t|^{-p'}dt$$

$$=M(n,\ p).$$

这就证明了（1）。

对于（2），从定理（3.2）有

$$|\tilde{w}(x_1)-\tilde{w}(x_2)|\leqslant M(n,\ p)|v,\ \Delta_n|_p|x_1-x_2|^a.$$

又利用定理（3.2，有
(3.8)

$$|\hat{w}(x_1)-\hat{w}(x_2)|\leqslant M(n)|v^{(n)},\Delta_n|_p x_1-x^{2}|\sum_{K=1}^{n-1}(I(x_1,x_2,k))^{1/p'},$$

此处

$$I(x_1,\ x_2,\ k)=\int_{\Delta_n}|1-tx_1|^{-kp'}|1-tx_2|^{-(n-k)p'}dt.$$

(a) 如果 $|x_1|$，$|x_2|\leqslant1/2$，则 $|1-tx_1|\geqslant1/2,|1-tx_2|\geqslant1/2$，
由此，$I(x)\leqslant2^{kp'}\cdot2^{(n-k)p'}M(n)=M(n,\ p)$.

(b) 如果 $|x_1|\geqslant1/2$，$|x_2|\leqslant1/2$，则

$$I(x_1,\ x_2,\ k)\leqslant2^{(n-k)p'}|x_1|^{-kp'}\int_{\Delta_n}\left|t-\frac{1}{x_1}\right|^{-kp'}dt$$

$$\leqslant M(n,\ p)|x_1|^{-kp'},$$

这里 $kp'\leqslant(n-1)p'<n$.

现在

$$\left(\frac{1}{|x_1|}\right)^{kp'}=2^{kp'}\left(\frac{1}{2|x_1|}\right)^{kp'}\leqslant 2^{kp'}\left(\frac{1}{2|x_1|}\right)$$

$$=2^{(k-1)p'}\left(\frac{1}{|x_1|}\right)^{p'},$$

并且

$$|x_1|^{-1}=|x_1|^{\alpha}\left|\frac{x_2}{x_1}-1\right|^{1-\alpha}|x_1-x_2|^{\alpha-1}\leqslant 2^{\alpha}2^{1-\alpha}|x_1-x_2|^{\alpha-1},$$

因此

$$I(x_1,\ x_2,\ k)\leqslant M(n,\ p)|x_1-x_2|^{(\alpha-1)p'}.$$

(c) 当 $|x_1|\leqslant 1/2$, $|x_2|\geqslant 1/2$ 时，我们仿照 (b) 中那样去证明。

(d) 当 $|x_1|$, $|x_2|\geqslant 1/2$ 时，则有

$$I(x_1,\ x_2,\ k)\leqslant|x_1|^{-kp'}|x_2|^{-(n-k)p'}$$

$$\int_{\Delta_n}\left|t-\frac{1}{x_1}\right|^{-kp'}\left|t-\frac{1}{x_2}\right|^{-(n-k)p'}dt.$$

由

$$kp'\leqslant(n-1)p'<n,$$

$$(n-k)p'\leqslant(n-1)p'<n,$$

$$kp'+(n-k)p'=np'>n.$$

和引理 (3.2) 有

$$I(x_1,\ x_2,\ k)\leqslant 2^{np'}M(n,\ p)\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|^{n(1-p')}$$

$$=2^{np'}M(n,\ p)\frac{1}{|x_1||x_2|}^{n(1-p')}|x_1-x_2|^{n(1-p')}$$

$$\leqslant 2^{np'}4^{n(1-p')}|x_1-x_2|^{n(1-p')}$$

$$=2^{np'}4^{n(1-p')}|x_1-x_2|^{(\alpha-1)p'}.$$

现在回到 (3.8) 式，我们有

(a) 对于 $|x_1|$, $|x_2|\leqslant 1/2$, $|x_1-x_2|\leqslant 1$, 因此有 $|x_1-x_2|$

$\leqslant |x_1 - x_2|^\alpha$.

(b－d) 在所有这些情况下，我们有

$$|x_1 - x_2|(I(x_1, x_2, k))^{1/p'} \leqslant M(n, p)|x_1 - x_2||x_1 - x_2|^{(\alpha-1)p'/p'}$$

$$= M(n, p)|x_1 - x_2|^\alpha.$$

因此（2）得以证明

对于（3），我们注意到，对于 $|x|>1$，$|t|\leqslant 1$，有

$$|t - x| \geqslant ||t| - |x|| \geqslant |1 - |x||,$$

所以

$$|\bar{w}(x)| \leqslant M(n)\left(\frac{1}{|x|^{-1}}\right)^{n-1}\int_{\Delta_n}|v(t)|dt$$

$$\leqslant M(n)|v, \Delta_n|_p \frac{1}{(|x|-1)^{n-1}}.$$

对于 α，$\beta>0$，$\beta-\alpha<0$，函数 $\beta/(s-1)^\alpha$ 关于 $s>1$ 是下降的，因此对于 $|x|\geqslant a$ 有

$$\frac{|x|^{(n-1)-(n/p)}}{(|x|-1)^{n-1}} \leqslant \frac{a^{(n-1)-(n/p)}}{(a-1)^{n-1}},$$

于是

$$|\bar{w}(x)| \leqslant M(n)|v, \Delta_n|_p \frac{a^{(n-1)-(n/p)}}{(a-1)^{n-1}}|x|^{(n/p)-(n-1)},$$

即

$$|\bar{w}(x)| \leqslant M(n, p)|v^{(n)}, \Delta_n|_p |x|^{p'-n}.$$

因为 $n/(n-1)\leqslant p$，有 $p'-n\leqslant(n/p)-(n-1)$，所以

$$|\bar{w}(x)| \leqslant M(n, p)|v^{(n)}, \Delta_n|_p |x|^{(n/p)-(n-1)}.$$

这就证明了（3）。为了证明（4），我们如同在定理（3.1）中那样进行即可。

由以上定理和推论（3.1）有

推论 3.2 如果 $w\in L^1_{l.c}(R^n)$，$v\in L^{p,n}(R^n)$，$n<p<\infty$，并且在 R^n 中 $v=\bar{\partial}w$（弱），则 $w-Jv$ 在 R^n 中是左正则的。

定理 3.4 如果 $v\in L^{p,n}(\bar{\mathfrak{S}})$，$1\leqslant p\leqslant n$，则函数 $w=J_{\mathfrak{S}}v\in L^r(\bar{\mathfrak{S}})$，此处$\mathfrak{S}$是 R^n 中的一个有界域，r是满足 $1<r<np/(n-p)$ 的任意数。此外，以下不等式

$$|J_{\mathfrak{S}}v,\ \mathfrak{S}|_r\leqslant M(p,\ \mathfrak{S})|v,\ \mathfrak{S}|_p$$

和

$$\left(\int_{\mathfrak{S}}|w(x+\Delta x)-w(x)|^r dx\right)^{1/r}\leqslant M'(p,\ r)|v,\ \mathfrak{S}|_p|\Delta x|^{n\alpha n}$$

也成立，此处

$$\alpha_k=\frac{1}{r}-\frac{k-p}{kp}>0,\ k=1,\cdots n.$$

证 首先假定 $p<r<np/(n-p)$。如果再设 $\alpha=\alpha_n$，则有

$$|J_{\mathfrak{S}}v|=\left|\frac{1}{\omega_n}\int_{\mathfrak{S}}\frac{\bar{t}-\bar{x}}{|t-x|^n}v(t)dt\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\omega_n}\left(\int_{\mathfrak{S}}|v(t)|^{p/r}|t-x|^{n(\alpha/2-1/r)}|v(t)|^{p(1/p-1/r)}\right.$$

$$\left.|t-x|^{n(\alpha/2-1/q)}dt\right),$$

此处 $q=p/(p-1)$，$\alpha=(1/r)-(1/p)+\left(\frac{1}{n}\right)>0$，那时

$$-\frac{n}{r}+\frac{\alpha n}{2}-\frac{n}{q}+\frac{\alpha n}{2}=\frac{-n}{r}-\frac{n}{q}+n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}\right)$$

$$=-n+1.$$

从恒等式 $(1/r)+(r-p)/pr+(1/q)=1$ 可知，我们可以应用 Hölder 不等式得出

$$|J_{\mathfrak{S}}v|\leqslant\frac{1}{\omega}\left(\int_{\mathfrak{S}}|v(t)|^p|t-x|^{n(\alpha r/2)-1}dt\right)^{1/r}$$

$$\left(\int_{\mathfrak{S}}|v(t)|^p dt\right)^{(1/p)-(1/r)}$$

$$\times\left(\int_{\mathfrak{S}}|t-x|^{n(\alpha q/2)-1}dt\right)^{1/q}.$$

置 $M(n,\ q\alpha,\ \circledS)=\sup\limits_{x\in R^n}\left(\int_{\circledS}|t-x|^{n(\alpha q/2)-1}dt\right)$，有

$$\int_{\circledS}|J_{\circledS}v|^r dx\leqslant\frac{1}{\omega^r}M(n,\ q\alpha,\ \circledS)^{r/q}|f,\ \bar{\circledS}|_p^{r-p}$$

$$\times\int_{\circledS}|v(t)|^p dt\int_{\circledS}|t-x|^{n(\alpha r/2)-1}dx$$

$$\leqslant\frac{1}{\omega^r}M(n,\ q\alpha,\ \circledS)^{r/q}M(n,\ q\alpha,\ \circledS)|f,\ \bar{\circledS}|_p^r$$

由此我们的第一个不等式得证。显然，我们现在能够取消限制 $p>r$。

借助于以下估计

$$|w(x+\Delta x)-w(x)|\leqslant\frac{1}{\omega_n}\int_{\circledS}|v(t)|\left[\frac{\bar{t}-(\overline{x+\Delta x})}{|t-x-\Delta x|^n}-\frac{\bar{t}-\bar{x}}{|t-x|^n}\right]dt$$

$$\leqslant M(n)|\Delta x|\sum_{k=1}^{n-1}\left[\int_{\circledS}\frac{|v(t)|dt}{|t-x-\Delta x|^k|t-x|^{n-k}}\right],$$

我们着手去证明第二个不等式。在上面括号中的那个积分的估值分别地利用类似于证明第一部分时的办法，即

$$\int_{\circledS}|v(t)||t-x-\Delta x|^{-k}|t-x|^{-n+k}dt$$

$$\leqslant\int_{\circledS}|v(t)|^{p/r}|t-x-\Delta x|^{(k+1)(\alpha k/2-1/r)}|t-x|^{(n-k+1)(\alpha n-1/2-1/r)}$$

$$\times|v(t)|^{p(1/p-1/r)}|t-x-\Delta x|^{(k+1)(\alpha k/2-1/q)}|t-x|^{(n-k+1)(\alpha n-k/2-1/q)}dt$$

$$\leqslant\left(\int_{\circledS}|v|^p|t-x-\Delta x|^{(k+1)((r/2)\alpha k-1)}|t-x|^{(n-k+1)((\alpha n-k/2)r-1)}\right.$$

$$\left.dt\right)^{1/r}\times\left(\int_{\circledS}|v|^p dt\right)^{1/p-1/r}$$

$$\times\left(\int_{\circledS}|t-x-\Delta x|^{(k+1)((q/2)\alpha k-1)}|t-x|^{(n-k+1)((q/2)\alpha n-k-1)}dt\right)^{1/q}$$

$$\leqslant |v, \circledS|^{1-p/r}|\Delta x|^{-2/q+1+((n+2)/2)[1/r-1/p]}$$

$$\times\left(\int_{\circledS}|v|^p|t-x-\Delta x|^{(k+1)((r/2)\alpha k-1}|t-x|^{(n-k+1)((r/2)\alpha n-k-1)}dt\right)^{1/r},$$

再利用 Minkowski 不等式，有

$$\left(\int_{\circledS}|w(x+\Delta x)-w(x)|^r dx\right)^{1/r}$$

$$\leqslant |v, \circledS|_p^{1-p/r}|\Delta x|^{2(1-1/q)+((n+2)/2)[1/r-1/p]}$$

$$\times M(n)\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_{\circledS}|v(t)|^p dt\int_{\circledS}|t-x-\Delta x|^{(k+1)((r/2)\alpha k-1)}\right.$$

$$\left.\times|t-x|^{(n-k+1)((r/2)\alpha n-k-1)}dx\right)^{1/r}.$$

$$\leqslant M(n)|v, \circledS|_p|\Delta x|^{n((1/r)-(1/p)+1)}$$

$$=M(n)|v,\circledS|_p|\Delta x|^{n\alpha_n},$$

而这里利用了 Hadamard 引理去估计弱奇异积分的值。定理 3.4 证毕。

现在，我们容易说明，关于微分方程 $\bar{\partial}w=\sum_A C_A H_A w+F$ 解的正则性定理，假定 $C_A\in L^p(\circledS)$，$F\in L^p(\circledS)$，$p>n+1$。如果我们在 $L^q(\circledS)$ 中去寻找解，此处 $(1/p+1/q)=1$，那么 $\bar{\partial}w\in L^1(\circledS)$。同时，从上述定理可得，对于 $1\leqslant r\leqslant n$，以 $1<r<nr/(n-r)$，$\alpha=(1/r)-(n-p)/np$，有 $w\in L^r$。另外，由定理 3.3 可知 $J_{\circledS}F\in C^{0,\alpha}(\circledS)$，$\alpha=(p-n)/p$。因为 Φ 是调和的，即 $\bar{\partial}\partial\Phi=\partial\bar{\partial}\Phi=0$，所以 $\Phi\in C^\infty(\circledS)$，并且

$$w-J_{\circledS}\left(\sum_A C_A H_A w\right)=J_{\circledS}F+\Phi\in C^{0,\alpha}(\circledS)$$

或者

$$w-pw=J_{\circledS}F+\Phi=h\in B^{0,\alpha}(\circledS).$$

在这个方程中，形式地叠代后得到如下组：

$$w = p^{m+2}w + p^{m+1}w + p^{r_n}h + \cdots + ph + h.$$

可以证明

$$p^k w \in L^{r_k}(Ⓢ_1),\quad Ⓢ_1 \Subset Ⓢ,\quad r_k = k\left(1/p - \frac{1}{n} + \beta\right) + 1/r,$$

此处，$0 < \beta < (1/n) - (1/p)$．因此，存在 m' 使得

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r_{m'}} = \frac{1}{r} + m'\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n} + \beta\right) + \frac{1}{p} < \frac{1}{n},$$

因此 $\sum_A C_A H_A P^{m'} w \in L^r(Ⓢ_1)$，此处 $r = prm'/(p + rm') > n$．再利用定理 3.4，可知 $w \in C^{0,\alpha}(Ⓢ_1)$．

大家知道研究积分方程

$$w - J_Ⓢ(\sum C_A H_A w) = J_Ⓢ F + \Phi(\in C^{0,\alpha}(Ⓢ))$$

解的唯一性，可以引出齐次方程

$$w - J_Ⓢ(\sum C_A H_A w) = 0$$

是否仅仅有平凡解的问题．可以证明，如果Ⓢ是充分小的，则存在唯一的平凡解．特别是，如果 $C_A \in L^p(Ⓢ)$，并且

$$\dim(Ⓢ)^{n-(n-1)q} < \frac{n-(n-1)q}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{\|\sum_A |C_A|\|_p},$$

这里 $p > n$，$(1/p) + (1/q) = 1$，那么上述结论是真实的．

还可以证明一个整体的结果，即对于 $Ⓢ = R^n$，如果我们要求在 R^n 中，系数 C_A 充分小，那么上述结论也是真实的．

再者，借助于关于单位球面的反射能够变换沿着单位球外面的 L^p- 积分为沿着单位球的加权的积分，即

$$\int_{|x|>1} |f(x)|^p dx = \int_{|x|<1} \frac{1}{|x|^{2n}} \left| f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right|^p dx =$$

$$= \int_{|x|<1} \left(|x|^{-2n/p} \left| f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right|^p \right) dx,$$

又回忆空间 $L^{p,\nu}(R^n)$ 的定义，这就可以得到恒等式

$$L^p(R^n) = L^{p,(2n/p)}(R^n)$$

的证明。另外，从不等式

$$\int_{|x|<1}|x|^{-\mu p}\left|f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right|^p dx \geqslant \int_{|x|<1}|x|^{-2n}\left|f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right|^p dx$$

$$\geqslant \int_{|x|<1}|x|^{-\nu p}\left|f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right|^p dx$$

我们能够断定对于 $\mu\leqslant(2n/p)\leqslant\nu$，以下的包含关系成立：

$$L^{p,\mu}(R^n)\supset L^p(R^n)=L^{p,(2n/p)}(R^n)\supset L^{p,\nu}(R^n),$$

定理 3.5 假定 $A(x)\in L^{p,n}(R^n)$，$(p>n)$ 则 $Pf=J(Af)$ 在 $L^{q,0}(R^n)$ 中，对于 $q>pn/(p-n)$ 是紧的，另外，$Pf\in C^\alpha(R^n)$，此处

$$0<\alpha=1-n\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\leqslant\frac{p-n}{p},$$

并且

$$||pf||C^\alpha\leqslant M(p,\ q)|A|_{p,n}|f|_{q,0}.$$

再有，如果取 $\beta=n(1-(1/p)-(1/q))+1$，那么当 $|x|\to\infty$ 时，估值

$$|(Pf)(x)|\leqslant M(p,\ q)|A|_{p,n}|f|_{q,0}|x|^{-\beta}$$

成立。

证 如果 $1/r=(1/q+1/p)<1/n$，则 $r>n$，并且关于单位球 Δ，Hölder 不等式蕴含着

$$|Af,\ \Delta|_r\leqslant|A,\ \Delta|_p|f,\ \Delta|_q,$$

和

$$|(Af)_\nu,\Delta|_r\leqslant\left|\frac{1}{|x|^\nu}A\left(\frac{x}{|x|^2}\right)f\left(\frac{x}{|x|^2}\right),\ \Delta\right|_r$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{|x|^\nu}A\left(\frac{x}{|x|^2}\right),\ \Delta\right|_p\left|f\left(\frac{x}{|x|^2}\right),\ \Delta\right|_q.$$

联合以上这些不等式，我们得到

$$|Af|_{r,\nu}\leqslant|A,\ \Delta|_p|f,\ \Delta|_q+|A_\nu,\ \Delta|_p|f_0,\ \Delta|_q$$
$$\leqslant|A,\ \Delta|_p|f|_{q,0}+|A_\nu,\ \Delta|_p|f|_{q,0}$$
$$\leqslant|A|_{p,\nu}|f|_{q,0}.$$

因此，$|Af|_{r,n}\leqslant|A|_{p,n}|f|_{q,0}$，它蕴含着 $Pf\in C^\alpha(R^n)$，$0<\alpha<1-n(1/p)+(1/q)$。

定理 (3.3) 蕴含着

$$|Pf|_{C^\alpha}\leqslant M(p,\ q)|A|_{p,n}|f|_{q,0}$$

并且对于任意的 $a>0$ 存在一个常数 $M(p,\ q,\ a)$，使得

$$|(Pf)(x)|\leqslant M(p,\ q,\ a)|A|_{p,n}|f|_{q,0}|x|^{-(n/r)-(n-1)}.$$

定理 3.6 假设 $C_A(x)\in L^{p,n}(R^n)$，$p>n$，则算子

$$Pf=J\Big(\sum_A C_AH_Af\Big)$$

在空间 $C(R^n)$ 中是紧的，并且它映射这个空间到 $C^\alpha(R^n)$ 中，$\alpha=(p-n)/n$。另外，我们有

$$|Pf||_{C^\alpha}\leqslant M(p)\Big|\sum C_A\Big|_{p,n}||f||_\infty,$$

此处 $||f||_\infty=\sup\limits_{R^n}|f(x)|$。再有，当 $|x|\to\infty$ 时，估值

$$|Pf|\leqslant M(p)\Big|\sum C_A\Big|_{p,n}||f||_\infty|x|^{n((1/p)+(1/q)-1)-1}$$

成立。

证 我们注意到对于 $f\in C(R^n)$，有 $\sum C_Af\in L^{p,n}(R^n)$，$p>n$，并且 $|\sum C_Af|_{p,n}\leqslant\sum|C_A|_{p,n}||f||_\infty$。因而，从定理 (3.3) 的结论 (1)、(2) 可得上面的两个估值。

令 $L^pL^{p'}(\bar{\mathfrak{S}})$ 是空间 $L^p(\mathfrak{S})$ 和 $L^{p'}(\mathfrak{S})$，$p>n$，$1<p'<n$ 的交。$L^pL^{p'}(\bar{\mathfrak{S}})$ 变成以

$$||f,\ \mathfrak{S}||_{p,p'}=|f,\ \mathfrak{S}|_p+|f,\ \mathfrak{S}|_{p'}$$

为范数的 Banach 空间。

定理 3.7 令 $f\in L^pL^{p'}(\bar{\mathfrak{S}})$，$p>n$，$1<p'<n$，则函数 $v=Jf$

满足

$$(3.9)\qquad |v(x)|\leqslant M(p,\ p')\|f,\ (S)\|_{p,p'},\quad x\in R^n,$$

并且

$$(3.10)\qquad |v(x_1)-v(x_2)|\leqslant M(p,\ p')\|f,\ (S)\|_{p,p'}|x_1-x_2|^{(p-n)/p}.$$

证 从定理（3.2）的不等式（2）可得不等式（3.10），因为（2）的常数 $M(n,\ p)$ 不依赖于域 Ⓢ. 然而，我们注意到，不等式（1）的 $M(n,\ p,\ (S))$ 依赖于Ⓢ. 因此为建立（3.9），我们借助于在 $R^n\backslash (S)$ 中 $f\equiv 0$ 的假设，并且分解 Jf 为

$$(Jf)(x)=\frac{-1}{\omega_n}\int_{R^n}\frac{\bar{t}-\bar{x}}{|t-x|^n}f(t)\,dt$$

$$=\frac{-1}{\omega_n}\int_{|t|<1}\frac{\bar{t}}{|t|^n}f(t+x)\,dt-\frac{1}{\omega_n}\int_{|t|>1}\frac{\bar{t}}{|t|^n}f(t+x)\,dt.$$

从 Hölder 不等式可得

$$|(Jf)(x)|\leqslant\frac{1}{\omega_n}\Big(\int_{|t|<1}|f(t+x)|^p dt\Big)^{1/p}\Big(\int_{|t|<1}|t|^{-q(n-1)}dt\Big)^{1/q}$$

$$+\frac{1}{\omega_n}\Big(\int_{|t|>1}|f(t+x)|^{p'}dt\Big)^{1/p'}\Big(\int_{|t|>1}|t|^{-q'(n-1)}dt\Big)^{1/q'}$$

$$\leqslant\frac{1}{\omega_n}\Big[\Big(\frac{\omega_n}{1-(q-1)(n-1)}\Big)^{1/q}|f|_p$$

$$+\Big(\frac{\omega_n}{(n-1)(q'-1)-1}\Big)^{1/q'}|f|_{p'}\Big]\leqslant M(p,\ p')\|f\|_{p,p'},$$

这里

$$M(p,\ p')=\frac{1}{\omega_n}\Big[\Big(\frac{\omega_n}{1-(q-1)(n-1)}\Big)^{1/q}$$

$$+\Big(\frac{\omega_n}{(n-1)(q'-1)-1}\Big)^{1/q'}\Big]$$

从以上我们还可以建立积分方程（3.3）的解的唯一性。

定理 3.8 令系数 $C_A(x)\in L^pL^{p'}(R^n)$，并且满足不等式

$$\left(\frac{\omega_n}{1-(q-1)(n-1)}\right)^{1/q}+\left(\frac{\omega_n}{(n-1)(q'-1)-1}\right)^{1/q'}.$$

$$(3.11)\qquad <\frac{\omega_n}{||\sum_A|C_A|||_{p,p'}},$$

则 $w=J(\sum_A C_A H_A w)$ 在 $C(R^n)$ 中的唯一解是平凡解。

证 当 $J=L^pL^{p'}(R^n)\to C(R^n)$时，有 $|Jf|\leqslant||J||^*{}_{p,p'}||f||_{p,p'}$，此处 $||\cdot||^*{}_{p,p'}$ 表示在对偶空间 $L^pL^{p'}(R^n)$ 中的范数。又从 $w=J(\sum C_A H_A w)$ 可得估值

$$|w|\leqslant||J||^*{}_{p,p'}||\sum C_A H_A w||_{p,p'}\leqslant M(p,\ p')||w||_\infty||\sum C_A||_{p,p'},$$

这里的 $M(p,\ p')$由（3.9）给出。对上式左边取上确界范数可得

$$||w||_\infty\leqslant M(p,\ p')||w||_\infty||\sum C_A||_{p,p'},$$

由此可知，如果（3.11）成立，则 $||w||_\infty=0$。

利用定理（3.6）我们可以类似地证明以下的结果：

定理 3.9 假设系数 $C_A(x)\in L^{p'n}(R^n)$ 满足不等式

$$||\sum C_A||\leqslant M(p)^{-1},$$

此处 $M(p)$ 是定理（3.3）中不等式（1）的常数，则 $w=J(\sum C_A H_A w)$ 在空间 $C(R^n)$ 中仅有平凡解。

在定理（3.8）或定理（3.9）的情况下，积分方程（3.3）解的表示式化为

$$w(x)=R(F_1)=F_1(x)+\sum_A\int_{R^n}\Gamma_A(x,\ t)H_A F_1(t)dt.$$

并且微分方程（3.1）的解的 Cauchy 积分表示式变成

$$w(x)=\sum_B\int_{(\dot{S})}\Omega_B(x,\ t)H_B(d\sigma_t w(t)).$$

此时算子 M 和 M^* 的零空间是空的，所以 $N=N'=0$。并且所有包含基底 $\{w_1,\cdots,\ w_N\}$ 和 $\{v_1,\cdots,\ v_N\}$ 的表示式从以上得到的各种表示式中消失，

§ 4 Overdetermined 椭圆组

以下我们研究超定（Overdetermined）一阶椭圆组，前一节的广义正则函数作为一个子情况，包含在其中。为了书写方便，我们采用矩阵的记号。

令 $x=(x_1,\cdots,\ x_k)'\in R^k$，$u=(u_1,\cdots,\ u_n)'\in R^n$ 或者 C^n，并且研究一阶组

$$
\sum_{i=1}^{k} p_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}=f(x,\ u), \tag{4.1}
$$

这里 $p_i(i=1,\cdots,\ k)$ 是 $m\times n$ 矩阵，$m>n$。对于 $m=n$ 的情形，可以证明存在 k 的一个最大值，关于它这个组能够是椭圆组，为了完成这个简化，我们寻找 $n\times m$ 矩阵 $R_i(i=1,\cdots,\ k)$，使得

$$
R_iP_j+R_jP_i=2\delta_{ij}I_n, \tag{4.2}
$$

此处 I_n 是单位 $n\times n$ 矩阵。当 $m=n$ 时，能够利用一个 Clifford 代数公式。

定义 4.1 如果对于全部 $\xi=(\xi_1,\cdots,\ \xi_k)\in R^k\backslash\{0\}$，矩阵

$$
P(x,\ \xi)=\left(\sum_{i=1}^{k}P_i(x)\xi_i\right)
$$

有秩 n，则称超定组（4.1）在点 x 是**椭圆的**。

条件（4.2）足以保证椭圆性。事实上，以 $\xi_i\xi_j$ 乘之并且按下标求和，可得

$$
\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_iR_i\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\xi_jP_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2I_n.
$$

它说明 $P(x,\ \xi)$ 有一个左逆，因而它有秩 n。

定义 4.2 组（4.1）叫做**非退化**的，如果 $m\times kn$ 矩阵

$P=(P_1,\cdots,\ P_k)$ 的秩是 $m<nk$。另外，这个组叫**高超定**的，如果 $m\geqslant\frac{1}{2}n(k+1)$。

通过引进矩阵 R 和 T。例如，取 $R=(R_1,\cdots,\ R_k)$，

$$
T=\begin{pmatrix}
P_1 & P_2 & & \cdots & P_k & 0 & & \cdots & 0 & 0 & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & P_1 & & \cdots & 0 & P_2 & P_3 & \cdots & P_k & 0 & & \cdots & 0 & & & & 0 \\
 & & P_1 & \cdots & 0 & 0 & P_2 & \cdots & 0 & P_3 & P_4 & \cdots & P_k & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & \ddots & & & & & & 0 & P_3 & \cdots & 0 & \cdots & & & \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \cdots & P_{k-1} & P_k & \\
0 & & & \cdots & P_1 & 0 & & \cdots & P_2 & 0 & & \cdots & P_3 & \cdots & 0 & P_{k-1} & P_k
\end{pmatrix},
$$

那么条件（4.2）可以写为

$$RT=I, \tag{4.3}$$

这里 I 是 n 行 $\frac{1}{2}nk(k+1)$ 列的矩阵，且

$$I=[I_nO_{n\times n(k-1)}I_nO_{n\times n(k-2)}I_nO_{n\times n(k-2)}\cdots I_nO_{n\times n}I_n],$$

其中 $O_{p\times q}$ 表示 p 行 q 列的零矩阵。显然，T 有 mk 行 $\frac{1}{2}nk(k+1)$ 列。

定理 4.1 假定组（4.1）是高超定的，$r=\frac{1}{2}nk(k+1)$，则如果有一个左逆 U 满足

$$UT=I_r,$$

那么关于 R 组（4.3）是可解的。实际上，$R=IU$，并且组(4.1)是椭圆的。

如果组（4.1）有 nk 个等式，则它总可以简化为（4.2)，如果假定每一项 $(\partial u_i/\partial x_j)$ 为未知的，那么，从非退化条件可以得到这些项总是可解的。

定理 4.2

(1) 如果在组（4.1）中的矩阵 P_1 有最大秩，那么它能够假定为如下的形式

$$P_i = \begin{bmatrix} I_n \\ O_{s\times n} \end{bmatrix}.$$

(2) 如果存在矩阵 $R_i(i=1,\cdots,k)$ 满足 (4.2),那么它们能够假定为这样的形式

$$R_1 = [I_n,\ O_{n\times s}],\ R_i = [-A_i,\ b_i](i=2,\cdots,k),$$

其中矩阵 $b_i(i=2,\cdots,k)$ 是组

$$b_i a_j + b_j a_i = 2\delta_{ij} I_n + A_i A_j + A_j A_i,$$

$i,\ j=2,\ 3,\cdots,k$ 的解,此处 A_i、a_i 和 b_i 分别是 $n\times n,(m-n)\times n$ 和 $n\times(m-n)$ 矩阵。

这个定理的证明略有技巧但并不困难,我们这里省略它。让我们回到组 (4.1),对于 $m=n$ 的特殊情况,组 (4.1) 不再是超定的,因此在上式中的矩阵 a_i 和 b_i 不出现,并且上式变为下式

$$A_i A_j + A_j A_i = 2\delta_{ij} I(i,\ j=2,\cdots,\ k).$$

在这个情况下,矩阵 $\{A_1=I_n,\ A_2,\cdots,\ A_k\}$ 组成了关于 Clifford 代数的一个基底。这个代数与平方形式 $-(x_2^2+\cdots x_?^2)$ 有关。

定理 4.3 假设 $u\in C^1(\Omega)$ 是

$$(4.4)\qquad L[u] = \sum_{i=1}^{k} P_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x,\ u),\ x\in\Omega\subset R^k,$$

的一个解,这里 $|f(x,\ u)|\leqslant M|u|$,并且令矩阵 P_i 满足关系

$$(4.5)\qquad P_i^* P_j + P_j^* P_i = 2\delta_{ij} I,$$

这里 I_i^* 表示 P_i 的共轭转置矩阵。如果在 Ω 的某个开子集上,$u=0$,则在整个 Ω 中,$u=0$。

这个结论是在一系列的引理和定理的基础上建立的。为此,我们列举如下:

引理 4.1 设域 $\Omega\subset R^k$ 有界并且有一个 C^1 边界,令 M 是一个 $n\times n$ 具有 $C^1(\bar{\Omega})$ 表值 (entries) 的斜—Hermitian 矩阵。如

果 v: $\bar{\Omega}\to C^n$ 在 $C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)$ 中具有在Ω中的有界的一阶导数，并且在 $\dot{\Omega}$上 $v=0$，则

$$2\mathrm{Re}\int_\Omega v_{x_i}\cdot Mv_{x_j}dx$$

$$=\int_\Omega(v\cdot M_{x_j}v_{x_i}-v\cdot M_{x_i}v_{x_j})dx, \tag{4.6}$$

$$(i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ k).$$

证 可以利用分部积分法证之。这里从略。

定理 4.4 假定 Ω 如同引理 4.1 中所设，另外再设，对于所有 $x=(x_1,\cdots,\ x_k)\in\bar{\Omega}$，$x_1\neq 0$，假定 $u\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)$ 在 Ω 中具有有界一阶导数。如果在$\dot{\Omega}$中，$u=0$，并且假定 L 有如在定理（4.7）中所设的系数 P_i，则下式成立

$$\beta\int_\Omega x_1^{-2\beta-2}|u|^2dx\leqslant\int_\Omega x_1^{-2\beta}|Lu|^2dx, \tag{4.7}$$

此处β是一个非负整数。

证 若置 $u=x_1^\beta v$，则有

$$Lu=x_1^\beta\sum_{i=1}^k P_iv_{x_i}+\beta x_1^{\beta-1}P_1v$$

和

$$\int_\Omega x_1^{-2\beta}|Lu|^2dx=\int_\Omega\left|P_1v_{x_1}+\beta x_1^{-1}P_1v+\sum_{i=2}^k P_iv_{x_i}\right|^2dx$$

$$\geqslant 2\mathrm{Re}\int_\Omega P_1v_{x_1}\cdot\left(\beta x_1^{-1}P_1v+\sum_{i=2}^k P_iv_{x_i}\right)dx.$$

从（4.3）式可知，右边第一个积分依据分部积分法能变成

$$2\beta\mathrm{Re}\int_\Omega(x_1^{-1}P_1v_{x_1}\cdot P_1v)dx=\beta\int_\Omega x_1^{-2\beta-2}|u|^2dx.$$

再由于 $M=P_1{}^*p_i$ 是斜—Hermitian型矩阵，并且由（4.6）可

知，余下的积分等于零。

上面叙述的一系列结果的目的在于得出以下定理。

定理 4.5 假定域 $\Omega\subset R^k$ 有一个光滑边界且令 x^0 是一个边界点，它具有这样的性质：存在一个仅在 x^0 处与 Ω 相交的闭球。如果 $u\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)$，具有有界一阶导数，且适合条件 (4.4)、(4.5)；同时对于中心在 x^0 的某球 B，在 $\dot{\Omega}\cap B$ 上，$u=0$。则对于某个与 B 同心的球 B^1，在 $\Omega\cap B^1$ 中，有 $u=0$。

证 通过利用平移、旋转和变换尺度，能够假定球 B 的中心在原点，半径为 1，且 $x^0=(1, 0, \cdots, 0)$。能够证明，条件 (4.4)，(4.5) 通过上述变换是保持的。如果有必要，截短 Ω 以便使它有界；通过关于 B 的边界的反射，Ω 的象完全位于球体内。微分方程取这样的形式

$$\hat{L}u=\sum_{i=1}^{k} Q_i\frac{\partial u}{\partial y_i}=g(y, u),$$

此处 g 满足 Lipschitz 条件且矩阵 Q_i 满足关系 (4.5)。点 x^0 在反射之下仍然固定，并且 Ω 的象在 x^0 处是严格凸的，即支集 (Support) 的超平面 $\{x_i=1\}$ 仅在 $\{x^0\}$ 与 $\bar{\Omega}$ 相交。可以证明，不等式 (4.7) 对于所有 $\beta\geqslant\beta_0>0$ 成立，此处 β_0 仅仅依赖于维数 k。由此可知，对于中心在 x_0 的某个球 B'，在 $\Omega\cap B'$ 中，$u=0$。

注 如果 u 是方程 (4.4) 的解，此处系数满足 (4.5)，且如果在 Ω 的某个开集上，$u=0$，则在 Ω 中，$u=0$。

这些结果可以应用于一些特殊的高阶的情况。

例 4.1 给定

$$\Delta\phi=\sum_{i=1}^{k}\phi_{x_i x_i}=g(x, \phi, \nabla\phi). \tag{4.8}$$

引入新的未知数

$$u_0=\phi,\quad u_i=\phi_{x_i}(i=1, 2, \cdots, k),$$

我们可得超定组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_0}{\partial x_j}=u_j\ (j=1,\ 2,\cdots,k),\\ \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}-\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}=0\ \ (i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ k;\ i>j),\\ \sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{\partial u_j}{\partial x_j}=g(x,\ u).\end{cases}$$

书写上式为（4.4）形式，条件（4.5）看成是满足的。因此，可知唯一连续性质对于（4.8）成立。

例 4.2 给定

$$\Delta^2\phi=g(x,\ \phi,\ \nabla\phi,\ \Delta\phi,\ \nabla(\Delta\phi)).$$

通过置

$$u_0=\phi,\ u_i=\phi_{x_i},\ i=1,\ 2,\cdots k,$$

$$u_{k+1}=\Delta\phi,\ u_{k+1+j}=(\Delta\phi)_{x_j},\ j=1,\ 2,\cdots,\ k,$$

我们实现次数的简化，则得到一阶超定组

$$(4.9)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial u_0}{\partial x_j}=u_j,\quad \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}-\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}=0,\ \ i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ k;\ i>j,\\ \sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{\partial u_j}{\partial x_j}=u_{k+1},\quad \dfrac{\partial u_{k+1}}{\partial x_j}=u_{k+1+j},\ j=1,\ 2,\cdots,k,\\ \dfrac{\partial u_{k+1+i}}{\partial x_j}-\dfrac{\partial u_{n+1+j}}{\partial x_i}=0,\ \ i,\ j=1,\ 2,\cdots,k;\ i>j,\\ \sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{\partial u_{k+1+j}}{\partial x_j}=g(x,\ u).\end{cases}$$

如果我们以 $u=(u_0,\ u_1,\cdots,\ u_{2k+1})$ 表示向量 u，则（4.9）组能够写成矩阵形式

$$\sum_{j=1}^{k}\tilde{P}_j\frac{\partial u}{\partial x_j}=\tilde{f}(x,\ u),$$

此处

$$\tilde{P}_j = \begin{bmatrix} P_j & 0 \\ 0 & P_j \end{bmatrix},$$

并且 P_j 和上述例子中的相同，因此，能够证明

$$\Delta^2\phi = g(x,\ \phi,\ \nabla\phi,\ \Delta\phi,\ \nabla(\Delta\phi))$$

也满足唯一连续原理.

还可以证明，以下的最大模原理.

定理 4.6 假定 $u=(u_1,\cdots,\ u_m)$ 是 Ω 中的二阶一致椭圆组

$$(4.10)\quad \begin{cases} Lu_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{l_{ij}}(x)\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} C_{lj}(x)u_j = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad l,\ i,\ j=1,\cdots,\ m, \\ L = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} \end{cases}$$

的一个解，另外，假定这里的系数是有界复值函数，则存在一个仅仅依赖于（4.10)的系数的常数 $K\geqslant 0$，使得，如果 α 是 Ω 中的一个正 C^2 函数，则 $\alpha|u|^2 = \alpha\sum_{i=1}^{m}|u_i|^2$ 在满足 $\alpha^{-1}L\alpha - 2\alpha^{-2}(A\nabla\alpha)\ \nabla\alpha > K$ 的任何点 x 处不能达到正最大值，这里 $A=(a_{ij})$ 是 L 的主要部分的系数矩阵.

作为这个定理的一个实例，让我们研究形如

$$(4.11)\qquad \sum_{i=1}^{k} P_i\frac{\partial u}{\partial x_i} = Qu$$

的一阶组，此处 $u=(u_1,\cdots,\ u_m)$ 是一个行向量，并且 $m\times m$ 矩阵 $P_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 和 Q 有复值的定义于一个域 $\Omega\subset R^k$ 中的 C^1 支量. 另外，让我们假定这个解是 Ω 中的复值 C^2—函数，设我们可以按方式

$$(4.12)\qquad \left(\sum_{j=1}^{k} R_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{k} P_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=IL+S$$

选取 $m\times m$ 矩阵 $R_i(i=1,\ 2,\cdots,k)$，此处 I 是 $m\times m$ 单位矩阵。而 L 正如在上述定理中所说那样是 2 阶椭圆算子，且 S 是一个小于二阶的矩阵算子，那么，从定理（4.9）可得关于（4.11）的最大值原理成立。

让我们通过均分（4.12）的主要部分研究（4.12）。由此可得矩阵 R_i 必须满足方程

$$(4.13)\qquad \begin{cases}R_jP_i+R_iP_j=2a_{ij}I,\quad i\neq j,\\ R_iP_i=a_{ii}I.\end{cases}$$

如前所述，矩阵 $A=(a_{ij})$ 是对称的，另外 A 满足一致椭圆型条件，意即，对于某个常数 $C_0>0$，$\forall y=(y_1,\ y_2,\cdots,\ y_k)\in R$，有

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x)y_iy_j\geqslant C_0\sum_{i=1}^{k}y_i^2.$$

可以证明，通过 K（或 m）大于或等于 2，能够区分方程组（4.11）是什么类型的。当有实的主要部分时，$m=2$ 且 $k>2$ 的情况不是椭圆型的。当 m，k 都是 2 时，（4.11）能够表示成一个 Cauchy-Riemann 组的形式。$m\geqslant2$ 和 $k=2$ 的情况，导出 Douglis 组。因此，我们进一步限制讨论 $m>2$，$k>2$ 的情况。首先，能够证明，如果 R_i 存在，则组（4.11）是椭圆型的。以实标量 $\lambda_i\lambda_j$ 乘以（4.13）并且求和，得到

$$\left(2\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}\lambda_i\lambda_j\right)I=\sum_{i,j=1}^{k}(R_iR_j+R_jR_i)\lambda_i\lambda_j$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_jR_j\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_iP_i\right).$$

因为 A 是正定的，可得 $\det\left(\sum_i \lambda_i P_i\right) \neq 0$，除非 λ_i 全都是零，因此，我们断定（4.11）是椭圆型的。

还可以证明，对于一个给定的K，有一些关于m值的严格限制，对于它椭圆组存在。令$R(m)$，（$C(m)$）是使得对于所有不全为零的 λ_i，有 $\det(\sum\lambda_i P_i) \neq 0$ 的实（复）$m\times m$ 矩阵$\{P_1, \cdots, P_k\}$的最大数。如果置 $m=(2a+1)2^b$，$b=c+4d$，此处a，b，c，d是非负整数，$0 \leqslant c < 4$，则

$$R(m)=2^c+8d, \quad C(m)=2^b+2.$$

作为这个结果的一个实例，我们注意到在多于 2 个无关变量情况下的 6，10，14，18，…个方程的实一阶椭圆组是不存在的。另一方面，如果（4.1）是椭圆型的，则能够找到矩阵 $R_i(i=1, \cdots, k)$ 使得（4.13）成立。这些矩阵的定义等价于存在满足条件

$$Q_i Q_j = -Q_j Q_i, \quad i \neq j,$$
$$Q_i^2 = -I, \quad i=2, 3, \cdots,$$

的 $m\times m$ 矩阵 $Q_2, \cdots, Q_k$ 的一个集合，此处，每个 P_i 是 Q_i 的一个线性组合。矩阵 I，$Q_2, \cdots, Q_k$ 形成一个与平方形式 $-(x_2^2+\cdots+x_k^2)$ 有关的 Clifford 代数的基底。显然，对于这些 Clifford 代数它有可能确定一阶椭圆组，对于它最大值原理成立。

§5 高维函数论

本节我们主要讨论具有解析系数的高阶椭圆组的函数论。

给定一般高阶椭圆组

$$\sum_{j=1}^{N} L_{ij}(u_j) = f_i, \quad i=1, \cdots, N, \tag{5.1}$$

此处每个 L_{ij} 是形如

$$L_{ij}=\sum_{|\alpha|\leq m_{ij}} a_\alpha^{ij}(x)D^\alpha$$

的微分算子。在这里我们采用通常的约定

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\ \alpha_n),\ |\alpha|=\sum_{j=1}^n \alpha_j,\ D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

并且 $\xi^\alpha=\Pi_{j=1}^n\xi_j^{\alpha_j}$。算子 L_{ij} 的特殊多项式是

$$Q_{ij}(x,\ \xi)=\sum_{|\alpha|=m_{ij}} a_\alpha^{ij}(x)\xi^\alpha,\ 1\leq i,\ j\leq N.$$

假定系数 a_α^{ij} 是实值，组 (5.1) 叫做**椭圆型**的，如果存在整数 $s_1,\cdots,s_n$，$t_1,\cdots,t_n$ 使得 $s_i+t_j=m_{ij}$，并且对 $\xi\in R^n\backslash\{0\}$ 有 $\det(Q_{ij}(x,\ \xi))\neq 0$。我们说组 (5.1)在一个域Ⓢ中是**椭圆型**的，如果它在Ⓢ的每一点是椭圆型的。

在假定 a_α^{ij} 是 x 的实解析函数的情况下，可以证明，关于满足 Douglis-Nirenberg 椭圆型定义的高阶椭圆方程组的一个基本解的局部存在性，即对于一个于Ⓢ中的椭圆算子 $\sum L_{ij}$，我们在每个 $x\in$ Ⓢ 的邻域中能够找到一个在Ⓢ×Ⓢ$-\{(y,\ y)\}$中解析的 $N\times N$ 矩阵 $(k_{jl}(x,\ y))$，使得

$$\sum_{j=1}^N L_{ij}\int_{(S)} k_{jl}(x,\ y)h_l(y)dy=\delta_{il}h_l(x),$$

此处 $\delta_{il}=\begin{cases}1, & 当\ i=l,\\ 0, & 当\ i\neq l.\end{cases}$

(5.1) 的伴随组是 $\sum_{j=1}^N L_{ij}^*(v_j)=0$，这里

(5.2) $$L_{ij}^*=\sum_{|\alpha|\leq m_{ij}}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a_\alpha^{ij}(x).$$

假定$Q_{ij}^{*}=Q_{ij}$. 并且置$t=\max_j t_j$, $s=\min_j s_j$, 则$s_i^{*}=t_i-t$, $t_j^{*}=s_j+t$, $t^{*}=t$. 从Green定理, 有

$$\int_{\mathfrak{S}} v(x)L_{ij}(u(x))-u(x)L_{ij}^{*}(v(x))dx$$

$$=\int_{\mathfrak{S}} M_{ij}(u(x),\ v(x))d\sigma_x,$$

此处M_{ij}是至多$m_{ij}-1$次的关于u和v的双线性型. 伴随组(5.2)的基本解$(k_{jl}(x,\ y))$由$(k_{jl}^{*}(x,\ y))=(k_{lj}(x,\ y))$给定.

向量ξ叫做关于组(5.1)在点x的特征向量, 如果

$$\det(Q_{ij}(x,\ \xi))=0.$$

一个面在x是特征的, 如果它的法向量是特征的. 可以证明以下广义Cauchy-Kowalewski定理.

定理5.1 假设(5.1)的系数在域Ⓢ中是解析的. 置L_{ij}的阶是s_i+t_j并且令S是Ⓢ中的解析、正则$n-1$维流形, 则在S的每个非特征点x_0, 存在一个邻域$U(x_0)$(使得能够找到依赖于x_0的数r_j和S的法向, 满足$\max(0,\ t_j+s)\leqslant r_j\leqslant t_j$), 使得在邻域$U(x_0)$中, Cauchy问题

$$\sum_{j=1}^{N} L_{ij}(u_j)=f_i \quad 在U(x_0)中,$$

$$\frac{d^k u_j}{d\xi^k}=G_{jk},\ 0\leqslant k\leqslant r_j-1,\ j=1,\cdots,\ N \quad 在S\cap U(x_0)中,$$

是唯一可解的, 这里ξ是S的法向量, 并且G_{jk}是任意解析函数. 当$r_j=0$时, 没有任何数据能够是确定的, 而r_j只能在指定的界限内变化, 比较精确地确定它是不可能的. 然而却有$\sum r_j=m$成立, 此处m是这个组的阶.

作为Cauchy-Kowalewski定理的推论, 可以证明:

推论5.1 如果系数和组(5.1)的右边在一个域Ⓢ中是解

析的，则每个满足 $u_j \in C^{t_j}(\mathbb{S})$ 的解也是解析的。

在以上这些结论的基础上，可以证明关于在某个给定点 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$ 中，(5.1) 的解的 Cauchy 积分表示，并且还有 Cauchy 定理。

以下给出 Taylor 展开和 Laurent展开定理。

定理 5.2 假设椭圆组 $\sum_{j=1}^{N} L_{ij}(u_j)=0$，$i=1, 2, \cdots N$ 有解析系数，则在 x_0 的某个邻域 U 中，对每个多重指数 α，都存在一个矩阵解 $V^\alpha(x, x_0)=(N^\alpha_{jl}(x, x_0))$，使得椭圆组的每个解 u_j 能够用一个在 U 中一致收敛且逐项无限次可微的级数表示，即

$$u_j(x)=\sum_{l=1}^{N}\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{[D^\alpha u_l(x_0)]}{\alpha!}V^\alpha_{jl}(x, x_0),\ j=1,\cdots, N\ (\text{在}\ U)。$$

定理的证明利用了形式幂 $V^\alpha_{jl}(x, x_0)$ 满足 Cauchy 数据 (data)

$$D^\beta u_j(x_0)\beta!\,\delta_{\alpha\beta}\delta_{jl},\ j=1,\cdots, N,$$

这样一个事实。

以上定理能够看作是复分析 Taylor 定理的推广，例如在这个情况下，我们能够取 $x_1=x$，$x_2=y$，$L_{11}=\partial/\partial x, L_{12}=-\partial/\partial y$，$L_{21}=\partial/\partial y$，$L_{22}=\partial/\partial x$。阶数条件则由取 $s_1=s_2=0$，$t_1=t_2=1$ 而满足。

定理 5.3 如果椭圆组 $\sum_{j=1}^{N} L_{ij}(u_j)=0$ 有解析系数，则在 x_0 的某个有空洞邻域 $U'(x_0)$ 中，每个在 $U'(x_0)$ 中解析的解，能够展成一个一致收敛，逐项无限多次可微的级数

$$u_l(x)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|\geq 0}C_{\alpha k}V_{lk}^{\alpha}(x,\ x_0)+\sum_{k=1}^{N}\sum_{|\beta|\geq 0}d_{\beta k}D_z^{\beta}k_{lk}(x,\ z)|_{z=x_0},$$

这里 V_{lk}^{α}是在上述定理中叙述的解，而 $V_{lk}^{*\beta}$ 对应于伴随组，并且 Laurent 系数由公式

$$C_{\alpha k}=\frac{1}{\alpha!}\int_{|x-x_0|=\mu}\sum_{i,j}M_{ij}(u_j(x),\ D_z^{\alpha}k_{ki}(z,\ x)|_{z=x_0})ds,$$

$$d_{\beta k}=\frac{1}{\beta!}\int_{|x-x_0|=\mu}\sum_{i,j}M_{ij}(u_j(x),\ V_{ki}^{*\beta}(x,\ x_0))ds$$

给定，此处选取 μ 使得 $\{|x-x_0|\leqslant\mu\}\subset U'(x_0)$。

还可以证明，上述 Taylor 展开和 Laurent 展开的唯一性。

关于齐次组（5.1）的解的零点有如下定理：

定理 5.4 令 u 是（5.1）在 $U(x_0)$ 中的一个解，它在 x_0 处有一个零点．即全部 u 的分量在 x_0 有 $t_j+p_j>0$ 阶零点．令 $p=\min_j p_j$，并设 u_{0j} 是 u_j 的开始展开式的 t_j+p 次齐次多项式．则 $u_0=(u_{01},\cdots,\ u_{0N})$ 是借助于取（5.1）的主要部分和代之以 $x=x_0$ 而得到的常系数微分方程的解．

参 考 文 献

[1] Adams R.A., 《Sobolev 空间》, 人民教育出版社, 1983.

[2] Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, II. Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623-727; 17(1964), 35-92.

[3] Ahlfors L., Lecture on quasiconformal mappings, Princeton, 1966.

[4] АлВфорс Л., Берс Л., 1) Пространста Римановых поверхностей и квавиконформные отображения, Москва, 1961.

2) Riemann's mapping theorem for variable mctries, Ann. Math., 72 (1960), 385～404.

[5] Александов И. А., Сорокин А.С., Задача Шварца лдя многосвязных круговых областей, Сибир. Матем. Ж., 13 (1972), 971～1001.

[6] Ацтонпев.С. Н., Монахов В. Н., О разрешимости одного класса задач сопряжения со сдвигом, ДАН СССР. 205 (1972). 263～266.

[7] Begehr, H., 1) Randwertaufgaben für elliptische und für zusammengesetzte Systeme partieller fastlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung. Komplexe Analysis und ihre Anwendung auf partielle Differentialgleichungen. Martin-Luther-Universität, Halle-wittenberg, Wiss. Beiträge 27(1977), 6-10.

2) Boundary value problems for mixed kind systems of first order partial differential equations. 3. Roumanian Finnish Seminar on Complex Analysis, Bucharest 1976, Springer-Verlag 743, 1979, 600—614.

3) An approximation method for the Dirichlet problem of nonlinear elliptic sytems in $\mathbb{R}^r$. Rev. Roumaine Math. Pure et Appl. 27(1982), 927-934.

4) Boundary value problems for analytic and generalized analytic functions. Complex Analysis-Methods, Trends, and Applications. Akademie-Verlag, Berlin, 1983, 150-165.

[8] Begehr, H., Gilbert, R. P., 1) Über das Randwert-Normproblem für ein nichtlineares elliptisches System. Function Theoretic Methods Part. Diff. Equ. Darmstadt 1976, Springer-Verlag 561, 1976, 112-122

2) on Riemann boundary value problems for certain linear elliptic systems in the plane. J. Diff. Equ. 32 (1979), 1-14.

3) Boundary value problems associated with first order elliptic systems in the plane. Contemporary Math. 11(1982), 13-48.

[9] Begehr, H., Hile, G. N., 1) Nonlinear Riemann boundary value problems for a semilinear elliptic system in the plane. Math. z. 179(1982), 241-261.

2) Riemann boundary value problems for nonlinear elliptic systems. Complex Variables, Theory and Application 1(1983), 239-261.

[10] Begehr, H., Hsiao, G. C., 1) Nonlinear boundary value problems for a class of elliptic systems. Komplexe Analysis und ihre Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen. Martin-Luther-Universität, Halle-wittenberg. Wissenschaftliche Beiträge 1980, 90-102.

2) On nonlinear boundary value problems of elliptic systems in the plane. Ord. Part. Diff. Equ. Proc. Dundee 1980. Spring-Verlag 846, 1981, 55-63.

3) Nonlinear boundary value problems of Riemann-Hilbert type. Contemporary Math. 11(1982), 139-153.

4) The Hilbert boundary value problem for nonlinear elliptic systems. proc. Roy. Soc. Edinburgh 94A(1983), 97-112.

[11] Begehr, H., Wen Guo-chun, 1) The discontinuous oblique derivative problem for nonlinear elliptic systems of first order. to appear.

2) A priori estimates for the discntinuous oblique derivative problem for elliptic systems. to appear.

[12] Bergman, s., Integral operators in the theory of linear partial differential equations. Spring-Verlag, 1961.

[13] Bergman, s., schiffer, M., 1) Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics. Academic Press, New York, 1953.

2) Potential-theoretic methods in the theory of functions of two complex variables. Compositio Math. 10(1952), 213-240.

[14] Bers L., 1) 《准解析函数论》,科学出版社, 北京, 1964.

2) Univalent solutions of linear elliptic systems, Comm. Pure App. Math., 6(1953), 513～526.

3) Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynanics, New York, 1958.

4) Uniformizations by Beltrami equations Comm. Pure Appl. Math., 14(1961), 215～228.

5) Quasiconformal mapping, with application to differential equations, function theory and topology, Bull. Amer. Soc., 83 (1977), 1083～1100.

[15] Bers, L., John, F., Schechter, M., Partial differential equations. Interscience, New York, London, Sydney, 1964.

[16] Bers L., Nirenberg L., 1) On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications, Convengo internaz. equazioni lineari alle derivate partiali, Trieste, 1954, 111～140.

2) On linear and nonlinear elliptic boundary value problems in the plane, Convengo internaz. equazioni lineari alle derivate partiali, Trieste, 1954, 141～167.

[17] Бицадзе A. B., 1) 《线性偏微方程的某些线性定解问题》, 数学

进展，4(1958)，321～403

2) 《混合型微分方程》，科学出版社，北京，1955.

3) Краевые залачи лдя эллиптических уравения второго порядка, Москва, 1966.

[18] Боярский Б.В., 1) Обобщенные решения системы дифференциальнных уравнений первого порядка эллиптического тида и разрывными коэффицинтами, Матем. сб., 43 (1957), 451～503.

2) Оп первой краевой задаче для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости, Bull. Acad. Polon. Sci., Math. Astr. Phys., 7 (1959), 565～570.

3) On Dirichlet's problem for elliptic systems in space, Bull. Acad. Polon Sci., Math. Astr. Phys., 8 (1960), 19～23.

4) Некоторые граничные задача лля системы 2п уравнений эллиптического типа на плоскости, ДАН СССР, 124 (1958), 15～18.

5) Theory of generalized analytic vectors, Ann. Polon. Math., 17 (1966), 281～320.

[19] Bojarski B., Iwanic T., Quasiconformal mappings and nonlinear elliptic equations in two varible I. II, Bull. Acad. Polon. Sci., Math. Astr. Phys., 22(1974), 473～484.

[20] Brackx F., Delanghe, R., sommen, F., Clifford analysis. Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[21] Buchanan, J., 1) The Hilbert and Riemann-Hilbert problems for systems of Pascali type. Doctoral Dissertation, University of Delaware, Newark, 1980.

2) Bers-Vekua equations of two complex variables. Contemporary Math. 11 (1982), 71-88.

[22] Calderon A. P., Zygmund A., 1) On existence of certain integrals, Acta.Math., 38 (1952), 85～139.

2) On singular integral, Amer. Journ. Math., 78 (1956), 289～309.

[23] 陈杰:《关于方程$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=h$的解函数族》,内蒙古大学学报(自然科学), 2 (1962), 1～10.

[24] 陈传璋、侯宗义、李明忠等:《关于椭圆型方程组的边值问题的研究》,复旦大学数学论文集, 1964, 20～41.

[25] 陈传璋、侯宗义:《一阶椭圆型方程组的黎曼-哈斯曼边值问题》,复旦大学学报(自然科学),7 (1962), 15～24.

[26] 陈传璋、李明忠、朱学炎:《关于算子$T^n f$的一些性质及应用举例》,复旦大学数学论文集, 1960,167～174.

[27] 陈建功, The Hölder continuity of the general solutions of the linear elliptic system of partial differential equations, Sci. Sinica 10 (1961), 153～159.

[28] 陈方权:《一类带有两个 Carleman 位移的三元素边值问题》,北京师范大学学报(自然科学),1981, 2:1～10.

[29] 周毓麟: 1)《非线性偏微分方程》,数学学报,11 (1961), 181～192.
2)《关于非线性椭圆型方程与非线性抛物型方程的一些问题》,北京大学学报(自然科学),5 (1959), 283～326.

[30] 程宝龙: 1)《ε一拟共形映照的近似表示式和极值问题》,数学学报, 14 (1964), 212～217.
2)《ε一阶椭圆型方程组解的近似表示》,湖南数学年刊,1981, 2: 57～62.

[31] Colton D., Partial differential equations in the complex domain, London, 1976.

[32] Colton D., Gilbert R. P., Constructive and computational methods for differential and integral equations, Springer-Verlag, 1974.

[33] Courant R., Hilbert D.,《数学物理方法 II》,科学出版社,北京, 1977.

[34] ДанилюкИ. И., 1) О задаче с наклонной производной, Сибир. Матем. ж., 3 (1962), 17～55.
2) Исследование пространственных осесимметричных краевых задач, Сибир. Матем.ж., 4 (1963), 1271～1310.

(3) Об отображениях, соответвующих решениям уравнений эллиптичекого типа, ДАН СССР, 120 (1958), 17～20.

4) Нерегулярцые граничные задачи на плоскости, Москва, 1975.

[35] Delanghe, R., 1) on regular-analytic functions with values in a Clifford algebra. Math. Ann. 185 (1970), 91-111.

2) On regular functions with values in topological modules over a Clifford algebra. Bull. Soc. Math. Belg. 25 (1973), 131-138.

[36] 丁夏畦、王康廷、马汝念、孙家乐、张同:《常系数二阶偏微分方程组椭圆性的定义》,数学学报, 10 (1960), 276～287.

[37] 董光昌:《多连通区域上的黎曼-希尔伯特问题》,数学学报, 8(1958), 290～304.

[38] Douglis, A. A., 1) A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 259-289.

2) On uniqueness in Cauchy problems for elliptic systems of equations. Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 593-607.

[39] Douglis, A., Nirenberg, L., Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 8 (1953), 503-538.

[40] Dressel, F. G., Gergen J. J., Mapping for elliptic equations. Trans. Amer. Math. soc. 77 (1954), 151-178.

[41] Dzurajev, A., 1) Study of partial differential equations by the means of generalized analytical functioons. Function Theoretic Methods for Partial Differential Equations. Springer-Verlag 561, 1976, 29-38.

2) Systems of equations of composite type. Moscow, 1972 (Russian).

[42] 方爱农: 1) 《拟似共形映照与一阶非线性椭圆型方程组的函数论》,数学学报, 23(1980), 280～292.

2) 《非线性拟似共形映照的黎曼式存在定理》, 数学学报, 23

(1980), 341～353.

3) 《一阶偏微分方程组斜微商问题的积分算子及其解的表示定理》，湖南大学学报，1979.3: 25～43.

4) 《一阶偏微分方程组的斜微商问题解的微分性质及解的存在定理》，湖南大学学报，1979，4: 1～13.

5) 《积分算子与（非线性复合）边值问题》，中国科学，A辑，1982，21～30.

6) 《一阶非线性椭圆型偏微分方程组的两类边值问题》，数学年刊，3 (1982)，587～594.

[43] Гахов ф Д., Краевые задчи, Москва, 1963.

[44] Гахов ф Д., Черскин Ю. И., Уравнеиия тила свёртки, Москва, 1978.

[45] Gilbarg D., Trudinger N. S., 《二阶椭圆型偏微分方程》，上海科学技术出版社，1981.

[46] Gilbert, R. P., 1) Function theoretic methods in partial differential equations. Academic press, New York, 1969.

2) Pseudhyperanalytic function theory. Ber. Ges. Math. Datenverarbeit. Bonn 77 (1973), 53-63.

3) Nonlinear boundary value problems for elliptic systems in the Plane. Nonlinear Systems and Applications. Academic press, New York, 1977, 97-124.

4) Verallgemeinerte hyperanalytische Funktionentheore. Komplexe Analysis und ihre Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen vol.2. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg 1980, 124-145.

[47] Gilbert, R. P., Buchanan, J. L., First order elliptic systems, A function theoretic approach. Academic Press, New York, 1983.

[48] Gilbert, R. P., Hile, G. N., 1) Generalized hypercomplex function theory. Trans. Amer. Math. Soc. 195 (1974), 1-29.

2) Degenerate elliptic systems whose coefficient matrix has a group inverse. Complex Variables, Theory and Application

1 (1982), 61-88.

[49] Gilbert, R. P., Lin Wei, Algorithms for generalized Cauchy kernels. Complex Variables, Theory and Application 2(1983), 103-124.

[50] Gilbert R. P., Weinacht R. J., Function theoretic methods in differential equations, London, 1976.

[51] Gilbert, R. P., Wendland, W., Analytic, generalized hyper-analytic function theory and an application to elasticity. proc. Royal Soc. Edinburgh 73A (1975), 317-331.

[52] Goldschmidt, B., 1) Funktionentheoretische Eigenschaften verallgemeinerter analytischer Vektoren. Math. Nachr. 90 (1979), 57-90.

2) Existence theorems for generalized analytic functions in R^n. Mathematik 34, Martin-Luther-Universität, Halle-Wittenberg, 1980

[53] Голузин Г. М., 《复变函数的几何理论》, 科学出版社, 1956.

[54] Haack W., Wendland W., Lectures on partial and pfaffian differential equations, London, 1972.

[55] Habetha K., 1) Über die Werteverteilung Pseudo-analytischer Functioner, Ann. Akad. Sci. Fenn. AI, 406 (1967).

2) On zeros of elliptic systems of first order in the plane, Function Theoretic Methods in Differential Equations, London, 1976, 45～62.

[56] Hile G. N., Hypercomplex function theory applied to partial differential equations, Indiana University, 1972.

[57] Hile, G. N., Protter, M. H., Unique continuation and the Cauchy problem for first order systems of partial differential equations. Comm Partial Diff. Equ.1 (1976), 437-465.

[58] Hörmander, L., 1) Differentiability properties of solutions of systems of differential equations. Ark. Mat. 3 (1958), 527-535.

2) Linear partial differential operators. Springer-Verlag,

1964.

[59] Hsiao, G. C., Wendland, W., A finite element method for some integral equations of the first kind. J. Math. Analysis Appl. 58 (1977), 449-481.

[60] 何成奇:《致密性与拟共形映照》,数学学报, 13 (1963), 447~453.

[61] 何成奇、陈翰麟、朱洪:《关于拟似共形映照的某些问题》,复旦大学数学论文集, 1964, 138~154.

[62] 侯宗义: 1)《在区域边界为抛物型退缩的一类二阶线性椭圆型方程的狄利克雷问题》,科学记录, 2 (1958), 311~315.

2) 《一阶椭圆型方程组的卡里曼边值问题》,复旦大学学报(自然科学),8 (1963), 127~140.

3) 《含奇线的二阶椭圆型方程组的边值问题》,复旦大学学报(自然科学),1979, 1:50~62.

4) 《一类高阶拟线性椭圆型方程的边值问题》,复旦大学学报(自然科学)1979,4:26~36.

5) 《一阶椭圆型方程组黎曼-哈斯曼边值问题的奇异情形》,数学学报, 23 (1980), 476~479.

6) 《某类一阶椭圆型偏微分方程组的哈斯曼边值问题》,数学年刊, 5A(1984), 633-644.

[63] 华罗庚、吴兹潜、林伟:《二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组》,科学出版社, 1979.

[64] Iwaniec T., 1) Green's function of multiply connected domain and Dirichlet problem for systems of second order in the plane, Function Theoretic Methods for Partial Differential Equations, 1976, 261~276.

2) Quasiconformal mapping problem for gereral nonlinear systems of partial differential equations. Inst. Naz, Alta Mat. Symposia Math., 18 (1976), 501~517.

[65] 蒋绍惠:《带两个位移的广义 Carleman 边值问题》,北京师范大学学报(自然科学),1981, 1:23~33.

[66] Керимов Т. В., О смешанной краевой задачэ для ливейного эллиптического уравнения 2-гопорядка, Дифф. урив.

13 (1977), 477～480.

[67] Колмогров А. Н., Фомин С. Е., 《函数论与泛函分析初步》, 高等教育出版社, 1957.

[68] Крушкаль С. Л., Квазиконформые отображения и Рамановы поверхности, Новосибирск, 1975.

[69] Künzi H. P., Quasikonforme Abbildungen, Springer-Verlag, 1960.

[70] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазллпнейные уравнения эллиптического тппп, Москва, 1973.

[71] Лаврентьев М. А., 1) Об одном классе непрерывных отображений, Матем.сб., 42 (1935), 407～434.

2) Основая теорема теории квазиконформных оторбражений плоских областей, Изв. АН., сер. Матем. 12 (1948), 513～554.

3) О некоторых краевых задача для систем эллиптического типа, Сибир.Матем. Ж., 3 (1962), 715～728.

4) К теории пространственных отображений, Сибир Матем. Ж., 3 (1962), 710～714.

[72] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функчий комплексного переменпого, Москва, 1958.[有中译本]

[73] Lehto O., Remarks on generalized Beltrami equations and conformal mappings, Proc, Rromanian-Finnish Seminar on Teichmüller Spaces and Quasiconformal Mappings, 1969, 203～214.

[74] Lehto O., Virtanen K. I., Quasikonforme Abbildungen, Springer-Verlag, 1965.

[75] Leray J., Schauder J., Topologie et equations fonctionnelles, Ann. Ecloe Nom. sup., 51 (1934), 45～78 (YMH 1 (1946), 3～4; 71～95).

[76] Литвинчук Г.С., 《带位移的奇异积分方程与边值问题》, 北京师范大学出版社, 1982.

[77] 李忠: 1) 《关于拟线性椭圆型偏微分方程组同胚解的存在定理》, 数

学学报，13（1963），454～461.

2）《变态的 Dirichlet 问题及其在拟保角映射中的应用》，北京大学学报（自然科学），1964，4：319～341.

3）《广义解析函数论中的极值原理》，数学进展，8（1965），173～182.

[78] 李忠、闻国椿：1）《一阶线性椭圆型偏微分方程组的哥西公式》，数学学报，14（1964），23～32.

2）《一阶线性椭圆型偏微分方程组的黎曼-希尔伯特边值问题》，数学学报，15（1965），599～613.

3）《广义黎曼-希尔伯特边值问题的解数》，数学学报，15(1965)，765～774.

[79] 李明忠：1）《二阶椭圆型偏微分方程组广义解存在定理和表示式》，数学学报，14（1964），7～22.

2）《一类二阶线性椭圆型方程组 Dirichlet 问题按 Hausdroff可解性》，数学年刊，3（1982），319～328.

3）《二阶线性椭圆型方程广义黎曼-希尔伯特问题》，复旦大学学报（自然科学），1978，4：25～32；1979，1：63～72.

4）《E_2 类二阶椭圆型方程组的 Neumann 问题》，复旦大学学报（自然科学），1979，3：24～34.

5）《E_2 类二阶椭圆型方程组的斜微商问题》，复旦大学学报（自然科学），1979，4：16～25.

6) Generalized Riemann-Hilbert problem for a system of first-order quasi-linear elliptic equations of several complex variables, ccmplex Variables: Theory and Application, 7 (1987), 383—393.

[80] 李子植、李洪振：《用连续性方法求解一阶椭圆型复方程某些边值问题》，河北大学学报（自然科学），1982，2：61～67.

[81] Levinson, N., Dirichlet problem for $\Delta u=f(x, y, u)$. J. Math.Mech 12 (1963), 567-575.

[82] Lions, J. L., Magenes, E., Non-homogeneous boundary value problems and applications. springer-Verlag, 1972.

[83] Lopatinski, Y. B., On a method of. reducing boundary pro-

blems for a system of differential equations of elliptic type to regular equations. Ukrain. Mat. z.5 (1953), 123-151.

[84] 吕德:《二阶非线性偏微分方程组的 Riemann 型衔接问题》, 湖南数学年刊, 1981, 1: 53～61.

[85] 柳企丰:《四阶非线性椭圆型复方程在多连通区域上的 Riemann-Hilbert 边值问题》, 四川师范学院学报 (自然科学), 1981, 4: 32～38.

[86] 刘来福: 1) 《用展级数法解二阶椭圆型方程的平面诺依曼问题》, 北京师范大学学报 (自然科学), 1962, 2: 19～26.

2) 《广义解析函数带位移的一个四元素边值问题》, 北京师范大学学报 (自然科学), 1981, 3: 1～12.

3) 《解析函数带位移的复合边值问题》, 数学年刊, 2 (1981), 325～337.

[87] 路见可: 1) 《复合边值问题》, 武汉大学学报(自然科学), 22(1962), 25～34.

2) 《关于周期应力平面弹性基本问题》, 力学学报, 7 (1964), 316～327.

3) 《开口弧段的双周期 Riemann 边值问题》, 数学年刊, 1 (1980), 289～298.

4) 《不同材料拼接平面裂纹中的数学问题》, 武汉大学学报 (自然科学), 1982, 2: 1～10.

5) The approximation of Cauchy-type integrals by some kinds of iuterpolatory splines, J.Approx. Theory, 36 (1982), 3: 197～212.

6) 《平面弹性复变方法》, 武汉大学出版社, 1986.

[88] Маркушевича А.И., Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, Москва, 1960, 1961.

[89] Manourian A., On the mixed boundary values problem for a first order elliptic equation in the plane, Bull.Acad. Polon. Sci, Math.Astr.Phys., 23 (1975), 1249～1254.

[90] Михлин С.Г., 《积分方程及其应用》, 商务印书馆, 1955.

[91] Mikhailov L.G.(Михайлов Л.Г.),On the analytic functions method in the theory of partial differential equations wth singular coefficients, Function Theoretic Methods for partial Differential Equations, 1976, 510~520.

[92] 闵嗣鹤:《广义解析函数的具体化与一般化》,北京大学学报(自然科学),1963,1~12.

[93] Miranda C., Partial differential equations of elliptic type, Springer-Verlag, 1970.

[94] Монахов В.Н., 1) Отображения Многосвязных ободастй решениями нелинейных L-эллиптических систем уравнений, ДАН СССР, 220(1975), 520~523.

2) Boundary value problems with free boundaries for elliptic systems. Amer. Math. Soc., 1983.

[95] Мусхелишвили Н.И., 《奇异积分方程》, 上海科学技术出版社, 1966.

[96] Nirenberg L., 1) On nonlinear partial differential equations and Höldercontinuity, Comm. Pure Appl. Math., 6(1953), 103~156.

2) On a generalization of quasiconformal mapping and its application to elliptic partial differential equations, Ann. Math. Studies, 33(1954),95~100.

[97] Nitsche, J.,Nitsche,J.J.,1)Das zweite Randwertproblem der Differentialgleichung $\triangle u=e^u$. Arch. math. 3(1952), 460-464.

2) Bemerkungen zum zweiten Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta\phi=\phi_x{}^2+\phi_y{}^2$. Math. Ann. 126 (1953), 69-74.

[98] Олейник О. А., Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области, ДАН СССР, 87 (1952), 885~888.

[99] Олейник О. Л., Радкевич Е. В., Уравнения второго порядкас неотоипательной характеристической формой, Москва, 1971.

[100] Parter S., On mappings of multiply connected domains by

solutions of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), 167～182.

[101] Положий Г. Н., Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного, p-аналитические и (p, q) -аналитические функции и векоторые их применения, киев, 1965.

[102] Protter M. H., Weinberger H. F., Maximum principles in diffferential equations, Prentice-Hall, 1967.

[103] 濮德潜：1) 《关于变复变函数》,I,II》,兰州大学学报(自然科学), 12 (1962), 1: 19～26, 2: 19～24.

2) 《重复变函数上、下》,数学研究与评论, 1983, 2: 113-122, 1985, 3: 101—108.

[104] Riesz M., Sur les maxima des formes billinéaireset sur les fonctionelles linéaires, Acta Math., 49 (1928), 465～497.

[105] Rodin, Yu. L., Generalized analytic functions on Riemann surfaces. Springer-Verlag, to appear.

[106] Шапиро З. R., Осуществовании квазиконформных отображений, ДАН СССР.30 (1941), 685～687.

[107] Schauder L., Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Math., 2 (1930), 171～181.

[108] Шербаков Е. А., Гомеоморфные решения одной вырождающейся эллиптической системы, Изв. Бысш. Учеб.зав., 173 (1976), 93～96.

[109] Соболев С. Л., 《泛函分析在数学物理中的应用》,科学出版社, 1959.

[110] Stein E. M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton, 1970.

[111] 沈以淡:《边界条件包含高阶微商的广义 Cauchy-Riemann 方程的边值问题》,北京工业学院学报, 1982, 1: 1～16.

[112] 孙和生: 1) 《从几何中提出的一些偏微分方程问题》,数学学报. 10 (1960), 288～314.

2) Некоторые вопросы десконенно малых изгиданий пове-

рхностей, ДАН СССР, 122 (1958), 559～561.

3) О единственпости решения вырождающихся уравнений и жесткости поверхностей, ДАН СССР, 122 (1958), 770～773.

[113] 戴中维:《各类椭圆型复方程在多连通区域上的斜微商边值问题》,应用数学与计算数学, 1982, 1: 69～73

[114] 田茂英:《一类非线性二阶退化椭圆型方程的混合边值问题》,北京大学学报（自然科学),1982, 5: 1～13.

[115] Тюриков Е. Б., нелинейвая краевая задача Римача-Гильберта для квазилинейных эллиптинеских систем, ДАН СССР, 247 (1979), 1068～1072.

[116] Tutschke W., 1) A general method for approximate solving of mixed problems in the theory of partial differentail equations, Complex Variables-Theory and Application, 1 (1982), 89～96.

2) Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungs systems erster Ordnung in der Ebene durch Verwendung einer komplexon Normalform, Mat. Nach., 75 (1976), 283～298.

[117] Векуа И. Н., 1) 《广义解析函数》,人民教育出版社, 1960.

2) 《椭圆型方程的新解法》,上海科学技术出版社, 1963.

3) 《一阶椭圆型微分方程组与边值问题及其在薄壳理论上的应用》,高等教育出版社, 1960.

4) Уравнения и системы уровнения аллиптического типа, Труды четвергого всесоюзного матемтического съезда, Том 1, 1961, 29～48.

5) Замечания о свойствах решений уравнения $\Delta u = 2ke$, Сибир. матем. ж., 1 (1960), 331～342.

6) Foundations of Tensor Analysis and Theory of Covariants. Nauka, Moscow, 1978.

[118] Векуа Н. П., 《奇异积分方程组及某些边值问题》,上海科学技术出版社, 1963.

[119] Виноградов В. С., 1)Об ограниченности решений краевых эадач для линйвых эллиптических систем уравнений на плоскости, ДАН СССР, 121 (1958), 399~402.

2) Об одни задаче для квазилинейных систем уравнезий на плоскостн, ДАН СССР, 121 (1958), 579~582.

3) Об одной граничной задаче для эллиптической системы специального внда, Дифф. Урав., 7 (1971), 1226~1234.

[120] Вишик М. И., О сильно эллиптических системах диффереэциальных уравснений, Мат. сб., 29 (1951), 613~676.

[121] Вишик М. И., Эскин Г. И., Эллиптические уравнения в свергках в ограниченной области и их приложения, УМН, 22 (1967), 15~76.

[122] Волковыский Л. И., Квазиконфомные отображония, Львов, 1955.

[123] 王鸿升:《广义解析函数的 B, H_8, D, A 类函数及其序列的收敛性》,数学学报, 13 (1963), 531~543.

[124] 黄沙、高普智:《n个未知复变函数的二阶椭圆型方程组的 Poincaré 边值问题》,河北师范大学学报 (自然科学),1981, 1、2: 146~165.

[125] 黄少云、王耀东:《稳态水锥自由边界问题及其数值逼近》,北京大学学报 (自然科学),1983, 1: 1~23.

[126] 黄海洋:《解析函数带位移的复合边值问题》,北京师范大学学报 (自然科学),1982, 4: 11~24.

[127] warschawski, w., On differentiability at the boundary in conformal mapping. Proc. Amer. Math. soc. 12 (1961), 614-620.

[128] 闻国椿(Wen Guo-chun): 1)《一阶非线性椭圆型方程组的连续可微同胚解的存在定理》,北京大学学报 (自然科学),1979, 2: 60~72.

2)《一阶非线性椭圆型复方程的变态狄氏边值问题与拟保角变换》,科学通报,25(1980),437~440(Kuxue Tongbao, A Monthly Journal of Science, 25 (1980), 449~453).

3) 《平面上一阶非线性椭圆型方程组的黎曼-希尔伯特边值问题》，数学学报，23 (1980)，244～255.

4) 《一阶非线性椭圆型复方程解的表示定理、凝聚原理与存在定理》，河北化工学院学报，1980年数学专辑，41～61.

5) 《关于黎曼-希尔伯特边值问题的奇异情形》，北京大学学报（自然科学），1981，4：1～14.

6) 《一阶非线性椭圆型偏微分方程组的黎曼型边值问题》，北京大学学报（自然科学），1980，4：1～13.

7) 《一阶非线性椭圆型复方程解的性质与边值问题》，应用数学与计算数学，1979，6：62～69.

8) 《一阶复方程于多连通圆界区域上解的积分表示及其性质》，河北师范大学学报（自然科学），1981，1、2：130～145.

9) 《二阶非线性椭圆型方程组的斜微商边值问题(I)》，河北化工学院学报，1980年数学专辑，119～144.

10) 《二阶线性椭圆型方程组负指数时的Poincaré边值问题》，数学研究与评论，1982，1：61～76.

11) 《二阶非线性椭圆型方程组在多连通区域上的斜微商边值问题》，中国科学，A辑，1982，771～780(Scientia Sinica (Series A), 26 (1983), 113～124).

12) The mixed boundary value problem for nonlinear elliptic equations of second order in the plane, Proc. of 1980 Beijing Sym. on Diff. Geom. and Diff. Equ. (1980年"双微"北京讨论会文集)，1543～1557.

13) 《多连通区域上的格林函数与斜微商问题解的积分表示》，北京大学学报（自然科学），1982，6：11～22.

14) 《关于带位移的线性、非线性复合边值问题》，北京大学学报（自然科学），1982，2：1～12.

15) On compound boundary value problems with shift for nonlinear elliptic complex equations of frst order, Complex Variables: Theory and Application, 1 (1982), 39～59.

16) 《二阶椭圆型方程组的第三边值问题》，数学年刊，4A(1983)，1～12.

17) 《无界可测系数的二阶非线性椭圆型方程解的表示定理与混合边值问题》，数学学报，26 (1983)，533～537.

18) On boundary value problems with the shift for nonlinear elliptic equations of second order, 《J. of Math. Res. and Expos.》(数学研究与评论)，1984，3：110～115.

19) Nonlinear quasiconformal glue theorems, 《Analytic Function》, Springer-Verlag, 1983. 458～463.

20) Function theoretic methods for nonlinear elliptic complex equatious, Bulleten de la société des sciences Mathématiques de la R. S. Roumauio, 1984, 1: 87～90.

21) Some boundary value problems for nonlinear elliptic systems of soveral second order equations in a multiply connected domain, Proc. of 1982 Changchun Sym. on Diff. Geom. and Diff. Equ. (1982年"双微"长春讨论会文集) 623—636.

22) 《多个未知函数的一阶非线性椭圆型方程组于平面多连通区域上的某些非线性边值问题》，北京大学学报（自然科学），1983，4：1～12.

23) 《共形映射与边值问题》，高等教育出版社，1985.

24) 《二阶线性椭圆型方程带位移的边值问题》，数学年刊，4A (1983)，465～473.

25) 《多连通区域上的格林函数与各种边值问题解的积分表示》，应用数学与计算数学，1982，1：55～60.

26) 《n个未知复变函数的一类二阶非线性复方程组的某些边值问题》，北京大学学报（自然科学），1984，2：1～11.

27) Some nonlinear boundary value problems for nonlinear elliptic equations of second order in the plane, complex Variables, 4(1985), 189～204.

28) 《带复共轭值的广义变态复合边值问题及其解的先验估计》，北京大学学报（自然科学），1985，6：8—19.

29) 《二阶非线性椭圆型方程的非线性间断边值问题》，纯粹数学与应用数学，1985，113—122.

30) 《力学、物理中的某些椭圆边值问题》，应用数学与计算数学，1984，3：1～11，

31) 《线性与非线性椭圆型复方程》，上海科学技术出版社，1986.

32) 《多个未知函数的二阶非线性椭圆组的某些非线性Poincare问题》，北京大学学报（自然科学），1984，6：1—11.

33) 《二阶椭圆型方程的非正则斜微商问题》，北京大学学报（自然科学），1986，5：15—25.

34) 《一阶非线性椭圆型复方程的非线性间断边值问题》，北京大学学报（自然科学），1985，3：1～10

35) Applcations of complex analysis to nonlinear elliptic systems of partial differenfial equations, Contemporary Math, Vol 48, 1985, 217～234.

[129] 闻国椿、方爱农：1) 《一阶非线性椭圆型方程组的复变函数论》，1978年函数论专辑，98～105.

2) 《二阶非线性椭圆型方程组的复形式与某些边值问题》，数学年刊，2(1981)，201～216.

[130] 闻国椿、戴中维：1)《一阶椭圆型方程组在多连通区域上的斜微商边值问题》，北京大学学报（自然科学），1981，3：19～29.

2) 《二阶非线性椭圆型复方程的非线性复合边值问题》，河北师范大学学报（自然科学），1983，1：6～18.

3) 《二阶线性椭圆型方程组在多连通区域上的Poincaré边值问题》，北京大学学报（自然科学），1983，2：1～10.

[131] 闻国椿、杨广武：1) 《平面上二阶非线性椭圆型方程组的性质与第一边值问题》，河北化工学院学报，1980年数学专辑，84～103.

2) 《二阶非线性椭圆型复方程的黎曼-希尔伯特问题》，河北化工学院学报，1980，2：49～57.

3) 《二阶线性椭圆型方程的Poincaré边值问题》，数学进展，10(1981)，157～160.

[132] 闻国椿、柳企丰：1) 《四阶非线性椭圆型方程解的存在定理与狄氏边值问题》，四川师范学院学报（自然科学），1979，2：55～73.

2) 《四阶椭圆型方程组的Riemann-Hilbert边值问题》四川师范学院学报，1981年数学专辑，90～103.

3）《多连通区域上某些空气功力学的自由边界问题》，四川师范大学学报（自然科学），1986，1：26—38.

[133] 闻国椿、李子植、李洪振：1）《非线性椭圆型复方程的黎曼-哈斯曼边值问题》，河北大学学报，1980年数学专刊，65～85.

2）《一阶非线性椭圆型复方程在全平面上解的性质及其应用》，河北大学学报（自然科学），1981，2：28～35.

[134] 闻国椿、高善智、黄沙：1）《2*m*个未知函数的二阶非线性椭圆型方程组的Dirichlet边值问题》，河北师范大学学报（自然科学），1979，1：1～11.

2）《*n*个未知函数的二阶椭圆型方程组的Neumann边值问题》，河北师范大学学报（自然科学），1981，1：166～178.

[135] 闻国椿、李生训、许克明：1）《关于拟保角映射的基本定理》，河北化工学院学报，1980年数学专辑，20～40.

2）《单叶黎曼曲面的非线性拟保角映射》，内蒙古师大学报，1984 2：18～26.

3）《一阶非线性椭圆型复方程的连续可微解》，河北化工学院报，1980年数学专辑，62～83.

[136] 闻国椿、康世祥：《四阶椭圆型方程组在多连通区域上的斜微商边值问题》，四川师范学院学报（自然科学），1983，2：53～64.

[137] 闻国椿、田茂英：《二阶椭圆型方程于全平面上的解》，数学杂志，2(1982)，1：23～36.

[138] 闻国椿、胡敏德：《解析函数的间断黎曼-希尔伯特问题》，后勤工程学院学报，1986，1：93—101.

[139] 闻国椿、吴文燧：《黎曼-希尔伯特问题可解性的新证法及其应用》，贵州科学，1984，2：6—10.

[140] Wen Guo-chun, Begehr H., Boundary value probelems for elliptic equations and systems, to appear.

[141] Wendland W., 1) Elliptic systems in the plane, London, 1979.

2) Numerishe Methoden bei Randwertproblemen elliptischer systeme in der Ebcue, Komploxe Analysis und ihre Anwendungen auf partielle Differentialgloichungen, 1980, 369～373.

[142] Wolfersdorf, L. v., 1) Monotonicity methods for class of first order semiliner elliptic systems. Komplexe Analysis und ihre Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen, 1980, 369-373.

2) A class of nonlinear Riemann-Hilbert problems for holomorphic functions. Math. Nachr. 116 (1984), 89-107.

[143] wolfersdorf, L. v., Wolska-Bochenek, J., A compound Riemann-Hilbert problem for holomorphic functions with nonlinear boundary condi tion. Demonstratio Math. 17 (1984), 545-556.

[144] Wolska-Bochenek J, A compound nonlinear bounday value problem in the theory of pseudoanalytic functions, Demonstratio Math., 4 (1972), 105～107.

[145] 吴新谋等编著:《数学物理方程》,科学出版社, 1958～1959.

[146] 吴素明:《土坝渗流中的非线性自由边界问题》,北京大学学报（自然科学),1987, 5

[147] 胡传淦:《向量值分析及其应用》,南开大学出版社, 1985,

[148] 夏道行、范莉莉:《拟似共形映照的参数表示及 其 应 用》,1960 年上海市科学技术论文选集, 数学化学, 66～99.

[149] 熊锡金: 1) 《泛复变函数(I)》,武汉大学学报（自然科学),1980, 1: 26～39.

2) 《一类混合型线性偏微分方程组在 L.Bers 意义上的广义解》,科学通报, 25 (1980), 870～872.

[150] 徐振远:《广义超解析函数的斜微商问题》,复旦 大 学 学 报（自然科学),22 (1983), 183～190

[151] 徐永芝:《一类二阶椭圆型方程组的 Riemann-Hilbert 问 题 与第二问题》,数学研究与评论, 6 (1986), 1: 115～121.

[152] 杨广武:《关于方程 $w_{\bar{z}}=f(z, w)$ 的黎曼变换定理与最大 模原理》,河北大学学报（自然科学),1983, 1: 59—66.

[153] 袁益让: 1) 《一类奇异积分方程的可解性及其对广义黎曼-哈斯曼问题的应用》,山东大学学报（自然科学),1965, 2: 1～26.

2) 《广义解析函数的黎曼型边值问 题》,科 学 通 报, 26 (1981),

193～197.

[154] 容尔谦:《关于衔接原理》,数学学报, 14(1964),58～61

[155] 赵桢: 1) 《用展级数法解二阶椭圆型方程的平面狄里赫来问题》, 北京师范大学学报(自然科学),1962, 2: 1～18.

2) Решение обобщенной задачи Римана-Гильбета методом разложения в ряд, ДАН СССР, 128 (1959), 253～256.

3) 《带两个 Carloman 位移的奇异积分方程的可解性问题》,北京师范大学学报(自然科学),1980, 2: 1～18.

4) 《带两个 Carleman 位移的奇异积分方程 Noether 可解的充分必要条件》,数学年刊, 2 (1981), 91～100.

5) 《关于带两个位移的广义 Hilbert 问题》, 数学研究与评论, 2 (1981), 97～108.

6) 《奇异积分方程》北京师范大学出版社, 1984.

[156] 赵桢、刘来福:《关于 n 重调和方程的基本边值问题》,北京师范大学学报(自然科学),1963, 3: 1～26.

[157] 张恭庆、姜伯驹:《渐近线性算子的多重解》,中国科学, 1979,225～236.

[158] 张孝礼:《圆型近似解析函数与椭圆型偏微分方程式的解的边界状态》,数学学报, 3 (1953), 101～132.

[159] 张学莲:《关于拟共形映照的掩盖定理》,数学学报, 29 (1986), 463—467.

[160] 复旦大学数学系:《实变函数与泛函分析概要》,上海科学技术出版社, 1963.